ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙНАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

ФОРМИРОВАНИЕ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ УЧАЩИХСЯ НА УРОКАХ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРОИЗВОДНОЙ.

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, профиль Математика
очной формы обучения, группы 02041302
Дмитренко Анастасии Александровны

Научный руководитель
старший преподаватель
Мандрика Г. В.

БЕЛГОРОД 2017

Оглавление

Введение

Актуальность исследования. Современный этап развития общества характеризуется внедрением информационных технологий во все сферы человеческой деятельности. Новые технологии оказывают огромное влияние и на сферу образования. Поэтому одной из дидактических задач школы является формирование мышления учащегося, развитие его интеллекта. Важной составляющей интеллектуального развития человека является алгоритмическое мышление.

Формирование алгоритмического мышления – важная составляющая часть педагогического процесса. Помочь учащимся проявить свои способности, развить инициативу, самостоятельность, творческий потенциал – одна из основных задач современной школы. Математика дает реальные предпосылки для развития алгоритмического мышления благодаря всей своей системе, исключительной ясности и точности своих понятий, выводов и формулировок.

Проблема формирования алгоритмической культуры учащихся особенно актуальна в современном образовательном процессе. Совокупность знаний, умений и навыков работы с алгоритмами формируется у подростков при изучении всех школьных дисциплин. Математике и информатике принадлежит ведущая роль в формировании алгоритмического мышления, воспитании умений действовать по заданному алгоритму и конструировать новые алгоритмы. В ходе изучения этих дисциплин систематически и последовательно формируются навыки умственного труда: планирование своей работы, поиск рациональных путей ее выполнения, критическая оценка результатов.

Серьезной методической и психолого-педагогической проблемой является реализация единого подхода при формировании способностей у учащихся и интересов алгоритмической культуры определенного уровня.

Предстоит также решить не менее сложную проблему оптимального соотношения алгоритмического и творческого подходов в процессе обучения.

Проблема исследования заключается в научном обосновании путей совершенствования алгоритмической культуры учащихся на уроках математики.

Цель исследования состоит в разработке методики формирования алгоритмических знаний и умений у учащихся в процессе изучения ими курса математики.

Объект исследования – учебный процесс в общеобразовательной школе.

Предмет исследования – пути формирования алгоритмических знаний и умений учащихся.

В соответствии с проблемой, объектом, предметом и целью исследования поставлены следующие **задачи**:

1. Рассмотреть актуальность проблемы формирования алгоритмической культуры учащихся.
2. Определить понятие алгоритмической культуры школьников.
3. Изучить применение алгоритмов при решении математических задач.
4. Дать методические рекомендации по формированию алгоритмической культуры школьников на уроках алгебры и начал анализа.

Структура работы. Дипломная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

В первой главе представлены пути формирования алгоритмической культуры у учащихся, также рассматривается история развития понятия «алгоритм».

Во второй главе рассматривается решения задач с применением производной. Разработаны методические рекомендации по формированию алгоритмической культуры при изучении в курсе «Алгебра и начала математического анализа» темы «Производная».

Глава 1. Формирование алгоритмической культуры у учащихся на уроках алгебры и начал анализа

В данной главе мы рассмотрим историю возникновения и развития понятия «алгоритм». Так же рассмотрим актуальность проблемы формирования алгоритмической культуры, которая с каждым годом все больше доказывает свою значимость и важность в учебном процессе.

1.1 История развития понятия «алгоритм»

Понятие алгоритма является базовым определением математики. Вычисления алгоритмического характера (арифметические действия над целыми числами, нахождение наибольшего общего делителя двух чисел и др.) известны еще с глубокой древности. Однако, понятие «алгоритм» сформировалось в явном виде лишь в начале XX века [5].

Алгоритм одно из самых главных понятий вычислительной математики. Это понятие возникло в связи с поисками общих методов решения однотипных задач еще задолго до появления ЭВМ.

Еще в III веке до нашей эры античный ученый математик Евклид изложил правило вычисления наибольшего общего делителя (НОД) двух натуральных чисел. «Алгоритм Евклида» состоит в том, чтобы вычитать из большего числа меньшее, подставляя результат на место большего числа, до тех пор, пока числа не станут равны друг другу. Эти равные числа и будут наибольшим общим делителем их разности и любого из чисел. Концепция этого алгоритма понятна даже на интуитивном уровне и не нуждается в уточнении для применения на практике. Наиболее конкретно «алгоритм Евклида» выглядит следующим образом:

1. Сравнить первое и второе числа. Если они равны, перейти к процедуре 4. Если нет, то перейти к процедуре 2.

2. Если первое число меньше второго, то переставить их. Перейти к процедуре 3.

3. Вычесть из первого числа второе и рассмотреть полученную разность как новое первое число. Перейти к процедуре 1.

4. Считать первое число результатом задачи [10].

Такой набор правил и является алгоритмом. Придерживаясь этого алгоритма, любой человек может найти НОД.

Это правило в истории формирования математики считают первым алгоритмом, причем само слово «алгоритм» появилось намного позже.

Древнегреческим ученым Эратосфеном во II веке до нашей эры был предложен метод получения простых чисел (точное название «решето Эратосфена»).

В IX веке узбекским математиком Мухаммадом Ал-Хорезми были разработаны правила четырех арифметических действий над числами. В Европе эти правила начали называть алгоритмами от латинской формы написания имени автора – Alchorismi или Algorithmi. Переводы арифметического трактата Ал-Хорезми с арабского содержали описание индийской позиционной системы счисления и искусства счета в этой системе. Образцом может служить алгоритм сложения «столбиком» [10].

Можно сделать вывод о том, что сначала понятие «алгоритм» обозначало десятичную позиционную арифметику и процедуры цифровых вычислений.

В течение длительного периода понятие алгоритма было интуитивным и его можно было выразить так: алгоритм - это строгая система правил, которая определяет последовательность действий над некоторыми объектами и после конечного числа действий приводит к достижению поставленной цели. В частности, система правил есть алгоритм, если любые исполнители, не знакомые с существом задачи, строго следуя данной системе правил, будут действовать одинаково и достигнут одного и того же результата.

Словесное представление алгоритмов математики применяли на протяжении длительного времени. Большинство вычислительных алгоритмов формулировалось именно в такой форме (например, алгоритмы поиска корней квадратных и кубических уравнений и даже алгебраических уравнений любых степеней).

Немецкий ученый Готфрид Вильгельм Лейбниц в 17 веке пытался найти общий алгоритм решения любых математических задач. Однако только лишь в нашем веке выдвинутая Лейбницем идея приобрела наиболее определенную форму: найти алгоритм проверки правильности любой теоремы при любой системе аксиом, то есть найти такой алгоритм, который бы отвечал на вопрос, верна ли теорема, и давал бы вывод ее доказательства. Создание подобных алгоритмов никак не получалось, и со временем появилось суждение, что это вообще невозможно, то есть рассматриваемые задачи алгоритмически неразрешимы. Однако, так как само понятие «алгоритм» не имело строгого определения, то в таком случае нельзя было и доказывать невозможность алгоритмического решения задач. Требовалось создание формального определения алгоритма. Приступать нужно было с формализации понятия объекта, так как объектом алгоритма может оказаться все что угодно. Так, например, любые объекты реального мира можно обозначать словами в некотором алфавите. Таким образом, объектами действия алгоритмов могут быть только слова, и алгоритм может быть определен, как четкая конечная система правил для преобразования слов из некоторого алфавита в слова из этого же алфавита [5].

В начале XX века алгоритм стал объектом математического изучения.

Одно из первых формальных определений алгоритма представил британский ученый математик Алан Тьюринг, который в 1936 году представил схему абстрактной машины и назвал алгоритмом то, что умеет делать такая машина. А в случае если что-то не может быть сделано машиной Тьюринга, то это уже не алгоритм. Подобным способом Тьюринг формализовал правила выполнения действий при помощи описания работы некоторой конструкции [14, с. 21-22].

Вычислительные машины - это тоже конструкции для выполнения алгоритмов, однако это реальные устройства, в то время как машина Тьюринга - это математическая модель. Такая математическая модель является абстракцией и никогда не была реализована, да и вообще не может быть реализована. Полезность машины Тьюринга в том, что, говоря о воображаемой конструкции, можно доказать существование или не существование алгоритмов решения различных задач.

Описывая, различные алгоритмы для своих машин и утверждая реализуемость всевозможных композиций алгоритмов, Тьюринг наглядно продемонстрировал многообразие возможностей предложенной им конструкции и высказал тезис: «Всякий алгоритм может быть реализован соответствующей машиной Тьюринга». Этот тезис является формальным определением алгоритма.

Приблизительно в одно время с А. Тьюрингом английский ученый математик Эмиль Пост создал схожую, но наиболее элементарную алгоритмическую схему и реализующую ее машину. Позднее было предложено еще несколько общих определений понятия алгоритма, и каждый раз удавалось доказать, что, хотя новые алгоритмические схемы и выглядят иначе, они в действительности эквивалентны машинам Тьюринга: все, что реализуемо в одной из этих конструкций, можно сделать и в других.

Советский ученый Андрей Андреевич Марков в 1954 году предложил собственную алгоритмическую схему преобразования слов и назвал ее нормальным алгоритмом. Также он ввел понятие нормализации как перехода от разных способов описания алгоритмов к эквивалентным нормальным алгоритмам. Главная гипотеза теории алгоритмов в форме Маркова звучит так: «Всякий алгоритм нормализуем». Алгоритмическая схема Маркова, так же как и машина Тьюринга, в общем случае не может быть физически реализована, так как она, например, допускает неограниченно большую длину слов. А вот формулировка алгоритма по Маркову гласит: «Алгоритм - это точное предписание, которое задает вычислительный процесс, начинающийся с произвольного (но выбранного из фиксированной для данного алгоритма совокупности) исходного данного и направленный на получение полностью определяемого этим исходным данным результата» [14, с. 23-25].

Все без исключения авторы алгоритмических схем, не взирая на разные принципы построения своих теорий, старались простыми средствами обеспечить возможность описания любых алгоритмов.

Наиболее единый подход к уточнению понятия «алгоритм» был предложен советским ученым Колмогоровым Андреем Николаевичем, которым было дано еще и его «явное» понимание: «Алгоритм, примененный ко всякому «условию» из некоторого множества, дает «решение». Алгоритмический процесс расчленяется на отдельные шаги заранее ограниченной сложности; каждый шаг состоит в «непосредственной переработке». Процесс переработки продолжается до того момента, пока либо не произойдет безрезультатная остановка, либо не появится сигнал о получении «решения». Формулировка согласно Колмогорову включает такие существенные моменты, как идея итеративности алгоритмического процесса и идея локальности каждого отдельного шага.

С середины XX века начали разрабатываться различные способы описания алгоритмов, например, с помощью специальных алгоритмических языков, и графического изображения алгоритма. Развитие электронной вычислительной техники и методов программирования поспособствовало тому, что разработка алгоритмов стала необходимым этапом автоматизации [5].

В настоящее время алгоритмы вышли за границы математики. Они начали применяться в самых различных областях. Под алгоритмами понимают точно сформулированные инструкции, назначение которых в достижении необходимого результата.

Формирование научного понятия алгоритма стало важной проблемой и не закончено даже в настоящее время. Более того, с наступлением эры информатики и ЭВМ, алгоритмы становятся одним из важнейших факторов цивилизации. Многие достижения в изучении понятия «алгоритм» имеют общематематический и, возможно, общечеловеческий интерес.

1.2 Понятие «алгоритм» в математике

Понятие «алгоритм» считается одним из главных понятий математики, которое не обладает формальным определением. Таким образом, это понятие можно представить в интуитивном виде. Алгоритмами можно назвать, к примеру, известные из начальной школы правила сложения, вычитания, умножения и деления столбиком.

Под алгоритмом можно понимать всякое точное предписание, которое задаёт вычислительный процесс (в данном случае алгоритмический), который начинается с произвольного исходного данного и направлен на процесс получения полностью определяемого этим исходным данным. К примеру, в алгоритмах арифметических действий возможными результатами могут быть натуральные числа, которые могут быть записаны в десятичной системе, а возможными исходными данными будут являться упорядоченные пары таких чисел, и в содержание предписания, таким образом, помимо инструкции по развёртыванию алгоритмического процесса, должно входить также:

1) указание совокупности возможных исходных данных;

2)правило, по которому процесс признается закончившимся ввиду достижения результата [23].

Никак не подразумевается, что результат будет обязательно получен. Процесс применения алгоритма к определенному возможному исходному данному или алгоритмический процесс, развёртывающийся начиная с этого данного, может также оборваться безрезультатно или не закончиться вовсе. В случае, если процесс заканчивается получением результата, можно сказать, что алгоритм применим (соответственно неприменим) к рассматриваемому возможному начальному данному, а в случае если процесс не заканчивается, то можно сказать, что алгоритмический процесс соответственно неприменим к рассматриваемому возможному исходному данному.

Понятие «алгоритм» занимает центральное место в современной математике, прежде всего вычислительной.

Улучшение вычислительных машин предоставляет возможность реализовывать на них наиболее сложные алгоритмы и выполнять с помощью ЭВМ все более трудные алгоритмические процессы. Вычислительный процесс не следует понимать в узком смысле только с целью цифровых вычислений. Так, уже и в школьном курсе алгебры говорят о буквенных вычислениях, однако еще и в арифметических вычислениях появляются отличные от цифр символы: скобки, знак равенства, знаки арифметических действий. Пойдя далее можно рассматривать вычисления с произвольными символами и их комбинациями. Собственно такое обширное понимание используют при описании понятия «алгоритм». Так, можно говорить об алгоритме перевода с одного языка на другой, об алгоритме работы поездного диспетчера (перерабатывающего информацию о движении поездов в приказы) и других примерах алгоритмического описания процессов управления. Собственно поэтому понятие «алгоритм» занимает одно из центральных мест и в кибернетике. В целом исходными данными и результатами алгоритма могут служить самые разнообразные конструктивные объекты, к примеру, результатами распознающих алгоритмов служат такие слова как «да» и «нет» [18, с. 23].

Алгоритмы в науке встречаются на каждом шагу. Способность решать задачу «в общем виде» всегда означает овладение некоторым алгоритмом. Говоря об умении человека складывать числа, имеют в виду то, что он владеет некоторым единообразным приёмом сложения, который может быть применимым к любым двум конкретным записям чисел, то есть иными словами, человек владеет некоторым алгоритмом сложения. Понятие задачи «в общем виде» уточняется с помощью понятия массовой проблемы, которая задаётся серией отдельных, единичных проблем и состоит в требовании найти общий алгоритм (метод) их решения. Так, проблемы численного решения уравнений и автоматического перевода являются массовыми проблемами. В случае численного решения уравнений это проблемы разного типа, а в случае автоматического перевода это проблемы перевода отдельных фраз. Значимость массовой проблемы определяет не только значение, но так, же и сферу приложения понятия «алгоритм». Многочисленные проблемы очень важны для математики: например, в алгебре это проверка алгебраических равенств различных типов, а в математической логике это массовые проблемы распознавания выводимости предложении из заданных аксиом. Для математической логики понятие «алгоритм» значительно, на него опирается центральное для математической логики понятие исчисления, предназначающееся для обобщения и уточнения интуитивных понятий «вывода» и «доказательства». Установление неразрешимости какой-либо массовой проблемы или проблемы распознавания истинности, а также доказуемости для какого-либо логико-математического языка, есть отсутствие единого алгоритма, который позволяет найти решение всех единичных проблем данной серии. Для решения конкретных единичных проблем принципиально необходимы специфические для каждой такой проблемы методы.

Содержательные явления, лежащие в основе образования понятия «алгоритм», уже давно занимали немало важную роль в науке. Почти все задачи математики, с древних пор, заключались в отыскании тех или иных конструктивных методов. Эти поиски, особенно усиливались в связи с созданием удобной символики и осмысления принципиального отсутствия искомых методов в ряде случаев вот, например, задача о квадратуре круга. Все это явилось мощным фактором развития научных знаний. Понимание невозможности решить задачу прямым вычислением привело к созданию теоретико-множественной концепции в 19 веке, где вопрос о конструктивных методах вообще не возникает. Лишь только в 20 веке оказалось возможным вновь вернуться к вопросам конструктивности. Этот возврат к вопросам конструктивности произошел уже на новом уровне, обогащенном понятием алгоритма. Такое понятие легло в основу особого конструктивного направления в математике [2, с. 27].

Процесс последовательного преобразования конструктивных объектов, который совершается дискретными «шагами» это и есть алгоритмический процесс. Каждый «шаг» сменяет один конструктивный объект другим. Каждый последующий «шаг» полностью определяется (в рамках данного алгоритма) напрямую предыдущим. При более строгом подходе подразумевается, что переход от каждого конструктивного объекта к следующему достаточно «элементарен» — в том смысле, что происходящее за один шаг преобразование предыдущего конструктивного объекта в следующий носит локальный характер. То есть в таком случае преобразованию подвергается не весь конструктивный объект, а только некоторая, предварительно ограниченная для данного алгоритма его часть.

Итак, наравне с совокупностями вероятных исходных данных и вероятных итогов, каждый алгоритм содержит ещё и совокупность промежуточных итогов, представляющих собой ту рабочую среду, в которой формируется алгоритмический процесс.

Работа алгоритма начинается с подготовительного шага, на котором исходное данное преобразуется в начальный член ряда сменяющих друг друга промежуточных итогов. Подобное преобразование совершается на основе специального, входящего в структуру рассматриваемого алгоритма «правила начала».

«После «правила начала» используется «правило непосредственной переработки», которое осуществляет поочередные преобразования каждого возникающего промежуточного итога в следующий. Данные преобразования совершаются до тех пор, пока некоторое испытание, которому подвергаются все без исключения промежуточные итоги по мере их возникновения, не покажет, что данный промежуточный результат является заключительным. Подобное испытание производится на основе специального «правила окончания». В случае если для промежуточных итогов «правило окончания» не даёт сигнала остановки, то либо к каждому из возникающих промежуточных итогов применимо «правило непосредственной переработки», и алгоритмический процесс продолжается неограниченно, или же к некоторому промежуточному результату «правило непосредственной переработки» оказывается неприменимым, и процесс оканчивается безрезультатно [12, с. 20].

В конечном итоге, из заключительного промежуточного результата — также на основе специального правила — извлекается окончательный результат. В многочисленных важных случаях правило начала и правило извлечения результата задают тождественные преобразования и потому в отдельности никак не формулируются.

Таким образом, для каждого алгоритма можно выделить семь характеризующих его параметров:

1) совокупность возможных исходных данных;

2) совокупность возможных результатов;

3) совокупность промежуточных результатов;

4) правило начала;

5) правило непосредственной переработки;

6) правило окончания;

7) правило извлечения результата [2, с. 28] .

Алгоритм является предметом изучения такой отрасли математики как теория алгоритмов. Вследствие изучения понятия «алгоритм», можно выделить 5 основных его свойств:

1. Определенность – в любой момент времени исполнитель должен знать, какое действие необходимо совершить;

2. Дискретность – разделение алгоритма на определенные действия, которые следуют друг за другом;

3. Массовость - по одному и тому же алгоритму могут решаться однотипные задачи и причем решаться они могут неоднократно;

4. Понятность - алгоритм всегда строится для некоторого конкретного исполнителя или класса исполнителей, для того, чтобы он был ему ясен. В данном случае исполнитель не обязательно должен понимать, по каким правилам строился алгоритм, в чем заключается смысл исполняемых инструкций. Должны быть понятны только сами указания;

5. Результативность означает, что алгоритм всегда должен приводить к результату [3, с. 148].

В ходе формального решения задачи, ее решение сначала описывается на языке математики в виде системы формул, а потом на языке алгоритмов в виде некоторого процесса, в котором применяются ранее определенные математические формулы и условия их выполнения. Таким образом, алгоритм может рассматриваться как связующий элемент в цепочке «метод решения - реализующая программа», то есть алгоритм связывает математику и информатику между собой.

1.3 Понятие алгоритмической культуры

Значение слова алгоритм согласно Ожегову: алгоритм – это совокупность действий, правил для решения данной задачи [16]. Алгоритм в Российском энциклопедическом словаре: способ (программа) решения вычислительных и других задач, предписывающий, какие процедуры необходимо выполнить и в какой последовательности, чтобы получить результат, однозначно определяемый исходными данными[22,с.38]. При решении задач общего характера (согласно психологическому словарю) алгоритм – это предписание о выполнении в определенной последовательности элементарных операций для решения любой задачи, принадлежащей к некоторому классу[21, с.16].

Проблема формирования алгоритмической культуры учащихся в образовательном процессе всегда актуальна.

Под алгоритмической культурой принято понимать совокупность специфических «алгоритмических» представлений, умений и навыков, которые на современном этапе развития общества должны составлять часть общей культуры каждого человека и, следовательно, определять целенаправленный компонент общего школьного образования[12, с.3].

Алгоритмический подход – это обучение учащихся методу решения задания через применение алгоритма, который описывает этот метод. Чем подробнее алгоритм, тем успешнее ученик решит поставленную задачу. Важно не перегрузить алгоритм шагами, чтобы не пришлось давать алгоритм к запоминанию алгоритма. Использование алгоритмов в обучении дает возможность повысить его результативность. Важно то, что алгоритм позволяет перейти от контроля к самоконтролю. Помимо этого, использование алгоритма дисциплинирует учащихся [1].

Успешное применение алгоритмического метода зависит от ряда условий:

1) Необходимо сочетание алгоритмического метода с применением образца ответа. В противном случае указания алгоритма приходится давать чересчур объемными и неудобными для применения.

2) Алгоритм должен быть по возможности более кратким. С кратким алгоритмом учащиеся работают значительно охотнее. Он является для них как бы планом, схемой, неким стимулом, помогающим восстанавливать в памяти только что прослушанные, но еще хорошо не запомнившиеся рассуждения учителя. Краткие указания легко запоминаются, и уже после выполнения нескольких упражнений многие учащиеся перестают читать отдельные указания, свободно воссоздают их по памяти.

3) Важно также пунктуальное выполнение данного учителем образца решения задачи. В результате многократного повторения у учащихся появляются необходимые ассоциации, которые по мере выполнения

упражнений сливаются в «составную» ассоциацию, а она в случае необходимости легко «развертывается» в цепочку промежуточных рассуждений.

4) В алгоритм предпочтительно включать указания, побуждающие обучающихся осуществлять контроль собственных действий. Это позволяет предупреждать типичные ошибки [4, 168].

Алгоритм для той или иной задачи может различаться в различных ситуациях: это зависит от конкретной цели, для достижения которой он используется. Учителю необходимо знать особенности класса, в котором он работает. Например, в наиболее сильном классе возможен алгоритм из последовательности необходимых шагов, а в более слабом классе этой же параллели в данном алгоритме появятся дополнительные, конкретизирующие шаги, либо разбиение оного алгоритма на два или несколько (подготовительные и основной) [15, с. 119].

Для слабо усваивающих школьников озвученный и представленный алгоритм становится весомым фактом повышения успеваемости. Такого рода алгоритм имеет форму сценария, организован по принципу «Делай, как я», где имеется пошаговый образец и задание для тренировки.

Учащиеся, хорошо овладевшие необходимыми алгоритмами, могут оперировать свернутыми знаниями при решении алгоритмических задач, в том числе и сложных, при этом они не затрачивают усилия на поиск решения частичных проблем, применяя алгоритмы. Работа с успевающими школьниками по освоению алгоритмов не менее важна, чем со слабыми учениками, потому что, усвоив сначала простой алгоритм, ученик с легкостью переходит на другой уровень знаний и становится поддержкой учителю в учебном процессе. Тогда можно организовывать другие формы проведения уроков, где в роли учителей-консультантов выступают сами учащиеся. Такие формы проведения уроков наиболее продуктивны.

Работа по алгоритмам развивает интерес учащихся к процессу обучения, они готовы заменить предложенный алгоритм наиболее простым и аргументировать рациональность такой замены, что развивает их творческое и конструктивное мышление. Алгоритмизация обучения подразумевает единство между анализом и синтезом и активно влияет на развитие творческого мышления учащихся. Свободное творчество возможно только на базе осознанных алгоритмах. «Никакой творческий процесс невозможен, если отдельные его звенья не автоматизированы» [12, с. 145] .

Составление актуального алгоритма самим учащимся может свидетельствовать о повышении его уровня учебной культуры. Способность учащихся оформить собственные размышления и весь ход решения задачи в виде таблицы или блок-схемы существенно дисциплинирует мышление, становится необходимым практическим качеством, содействует наиболее быстрому и сознательному овладению алгоритмическим языком в будущем. Составление алгоритмов активизирует умственную деятельность школьников и развивает их математические способности. Помимо этого, способность «увидеть» алгоритм и работать по нему позволяет избегать сопутствующих проблем: не смешивать шаги и их последовательность при запоминании правил или решении задач.

Обучение алгоритмам может осуществляться по-разному. Можно, например, давать учащимся алгоритмы в готовом варианте, чтобы они могли их просто заучивать, а потом закреплять в ходе выполнения упражнений. Однако можно и так организовывать учебный процесс, чтобы алгоритмы «открывались» самими учащимися. Этот метод, более значимый в дидактическом отношении, но требует больших затрат времени.

Поэтому выделяют два способа обучения алгоритмам:

- ознакомление с готовыми алгоритмами;
- создание проблемной ситуации с целью подвести учащихся к самостоятельному открытию необходимых алгоритмов [12, с. 149].

Эти пути не исключают друг друга. Более того, формирование алгоритмического процесса идет более успешно, если эти два пути сочетаются [12, с. 149].

«В общем случае с педагогической точки зрения гораздо более ценно когда ученик открывает соответствующие алгоритмы сам (если, конечно, задача для него посильна) или с помощью учителя, а не получает их в готовом виде» [12, с. 142].

Во втором случае предполагается три этапа формирования алгоритма:

1. Введение алгоритма (актуализация знаний, необходимых для введения и обоснования алгоритма; Открытие алгоритма учащимися под руководством учителя; Формулировка алгоритма; Блок-схема, таблица, список).

2. Усвоение (отработка отдельных операций, входящих в алгоритм и усвоение их последовательности).

3. Применение алгоритма (отработка алгоритма в знакомой и незнакомой ситуациях) [23].

Создание алгоритмов обучения предполагает описание обучающей деятельности учителя, содержащие предписания, правила, последовательность действий алгоритмического типа, при помощи которых учитель решает конкретные дидактические задачи. Тогда часть процесса обучения учащихся конкретному содержанию может быть показана в виде так называемого алгоритма обучения, отражающего методическую характеристику учения. Для создания этого алгоритма нужно проанализировать содержание и цели обучения, деятельность учащихся по его усвоению и деятельность учителя по организации усвоения, а также особенности учащихся данного класса. Алгоритмы обучения являются составной частью педагогических технологий.

Применение алгоритмического подхода в ходе обучения способствует не только совершенствованию форм и методов обучения, но и направленности образовательного процесса на личностное развитие обучающегося, выработке у них алгоритмических навыков, позволяющих формировать умение самостоятельно приобретать знания в дальнейшем.

Отметим, что проблема формирования алгоритмической культуры была важной и актуальной, и будет продолжать оставаться таковой. Ею занимаются педагоги-ученые, посильный вклад вносят школьные учителя. Именно введенные в учебный процесс специальные предписания и планы решения важнейших задач служат пропедевтикой формирования в дальнейшем у обучаемых алгоритмической культуры [12, с. 79-92]. Выработка автоматизма в решении нужна всегда. И если решение какой-то задачи более рационально через применение алгоритма, а на практике решается каким-либо другим способом, то не пытаться находить соответствующие алгоритмы и не обучать им во многих случаях нецелесообразно. Наоборот, обучение алгоритмам может быть прекрасным средством воспитания качественного творческого мышления [12, с. 145-146].

1.4 Принципы обучения алгоритмам

Математические методы закрепляются успешнее при введении в учебный процесс особых предписаний и правил, что служит пропедевтикой формирования в дальнейшем алгоритмической культуры учащихся. Регулярное использование в работе алгоритмов и предписаний должно ориентировать учащихся не на простое запоминание определенного плана или последовательных действий, а на понимание и осознание этой последовательности, обязательности каждого ее шага.

Обучение алгоритмам должно строиться с учетом следующих принципов:

- создание у учащихся полной ориентировочной основы применения алгоритмов;
- применение приемов, раскрывающих происхождение алгоритмов;
- алгоритмизация всего процесса обучения математике в школе;
- развитие логической культуры учащихся;
- обеспечение взаимосвязи алгоритмов;

- формирование основных компонентов алгоритмической культуры учащихся [23].

Занятия по алгоритмам развивают интерес учащихся к процессу обучения, они стремятся заменить предложенный алгоритм более простым и обосновать целесообразность такой замены, что развивает их творческое и конструктивное мышление. Алгоритмизация обучения подразумевает единство между анализом и синтезом и активно влияет на развитие творческого мышления учащихся. Свободное творчество возможно только на базе осознанных алгоритмов.

1.5 Пути формирования алгоритмического стиля мышления учащихся

В учебном процессе следует больше применять перевод учебного теоретического материала на язык схем и алгоритмов, что позволяет избежать негативных явлений в обучении:

- отсутствие четкого разделения между шагами действий;
- трудности в определении последовательности решения задач;
- сложность или невозможность изложения учебного материала четко и алгоритмически [20].

В процессе преподавания математики следует применять методы, формирующие алгоритмическую культуру обучающихся: выполнение заданий согласно алгоритму, выработка очередности шагов с обоснованием, составление алгоритма, конструирование алгоритма и прочие. Учащиеся, хорошо овладевшие необходимыми алгоритмами, могут оперировать свернутыми знаниями в ходе выполнения алгоритмических задач, в том числе и сложных, при этом они не затрачивают усилия на поиск решения частичных проблем, применяя алгоритмы.

Способность учеников оформить собственные размышления и весь процесс решения задачи в виде таблицы или блок схемы значительно дисциплинирует мышление, становится необходимым практическим качеством, способствует наиболее стремительному и осознанному овладению алгоритмическим языком в будущем.

Составление алгоритмов пробуждает умственную деятельность школьников и формирует их математические способности.

Реализация необходимых операций возможна только с помощью точного выполнения последовательных действий. При систематическом применении учителем в своей работе алгоритмов у учеников формируются элементы алгоритмической культуры.

1.6 Формирование алгоритмической культуры учащихся на уроках алгебры и начал анализа

Задача формирования алгоритмической культуры у учащихся должна решаться при обучении всем учебным предметам средней школы. Немалая роль при этом отводится курсу алгебры и начал математического анализа.

Алгоритм – один из базовых понятий математики. Обучение математике на любом уровне непременно включает обучение алгоритмам. Понятие алгоритма пронзает весь курс математики – от элементарной и до высшей математики. В учебниках математики зачастую встречаются пошаговые записи алгоритмов решения разных задач [26, с. 79].

При изучении этого курса в школе устойчивые математические навыки у учащихся вырабатываются успешнее, если ввести в учебный процесс специальные предписания и планы решения важнейших задач. Именно они служат пропедевтикой формирования в дальнейшем у обучаемых алгоритмической культуры. С другой стороны, твердое знание планов решения основных задач курса алгебры и начал анализа – это первоначальный фундамент математической подготовки учащихся.

Алгоритм считается одним из самых основных понятий математики, вернее одним из фундаментальных. Любой ученик, применив алгоритм, переходит от условия к окончательному результату. Алгоритмизация присуща не только математике, но математика как точная наука, в отличие от, например, физики, химии, такова, что для освоения ее понятий, методов решения необходимо, как правило, двигаться по шагам, поочередно выполняя заранее определенные действия. Такому подходу подчиняются правила решения различных стандартных уравнений, неравенств, методы решения типовых задач (на движение, на работу, на смеси и сплавы, на проценты), правила построения графиков функций и другие более частные вопросы (нахождения наибольшего общего делителя или приведения дробей к общему знаменателю), в конечном итоге, просто способы запоминания правил. В случае если такого алгоритма не находится, то мы говорим о нестандартных уравнениях, неравенствах и задачах. С целью осуществления решения в них необходимо разглядеть, где же там может содержаться знакомый частный алгоритм. В умении его «увидеть» и состоит творческий подход к решению задач учащимися, хорошо освоившими курс математики [26, с. 93].

Школьный курс математики подразумевает большой выбор алгоритмов. Это алгоритмы:

- приведение дробей к общему знаменателю;
- построение биссектрисы угла;
- решение задачи на построение;
- исследования функции и построения ее графика;
- вычисления площади криволинейной трапеции и др.

Применяя планы решения задач в процессе обучения математике, надо ориентировать учащихся на то, что им следует не просто запомнить тот или иной план, но главное понять, на каких теоретических предложениях основано его применение, и каждый шаг учебной деятельности, осуществляется по заданным предписаниям, выполнять сознательно, а не автоматически [28, с. 49].

При составлении такого плана необходимо руководствоваться следующими принципами:

1. Теоретический фундамент плана должны составлять теоретические сведения, имеющие непосредственное к нему отношение.

2. Система предписаний, имея дискретный характер, должна быть общей по отношению к целому классу однородных задач.

3. По содержанию система предписаний должна быть полной или достаточной, т.е. обеспечивать на каждом конкретном шаге учебной деятельности учащихся однозначное получение промежуточной информации, которая в своем комплексе гарантирует получение конечного результата.

4. Система предписаний должна быть совместной или непротиворечивой, т.е. каждое предыдущее предписание (или группа предписаний) должно являться малой посылкой (подводящей) для последующего, а последующее – логическим следствием предыдущих.

5. Число пунктов плана не должно быть большим (предельная норма 5-6 пунктов). Это обеспечивает его подвижность: объединение отдельных шагов или дробление шагов на более элементарные.

6. Система предписаний должна обеспечивать многократное решение однотипных задач, т.е. обладать свойством массовости [27, с. 103].

Знакомство учащихся с планами решения задач осуществляется на школьной лекции, дальнейшая их обработка выполняется на практических занятиях при различных формах работы (фронтальной, групповой, индивидуальной).

Например: математика 5-6 классов содержит объемный базовый учебный материал по обучению правилам действий с обыкновенными и десятичными дробями, положительными и отрицательными числами, изучив которые ученик может успешно учится дальше. Существует множество правил, которые требуют вдумчивого заучивания. Чем более слаб ученик, тем вероятнее, что если он не осознал последовательности шагов в описываемом правиле, тогда ему трудно сформулировать это правило и, тем более, применить. Наоборот, обозначив, к примеру, 3 шага в правиле, ученик способен строго следовать им как в своей индивидуальной деятельности на уроке, так и в коррекционной помощи своим затрудняющимся одноклассникам.

Способность определять и применять алгоритмы важна не только для формирования математического мышления и математических умений, она означает также и способность формулировать и выполнять правила. Алгоритмизация обучения подразумевается в двух смыслах: обучение учащихся алгоритмам, создание и применение алгоритмов в обучении [24].

Курс алгебры насыщен алгоритмами, изучив которые школьник благополучно справляется с множеством задач. В курсе геометрии же алгоритмов существенно меньше, тут необходимо хорошее знание теории (которая обширна и разнообразна) и творчество самого ученика, что представляет определенную трудность для многих учащихся. Отсюда более слабый уровень решаемости геометрических задач на экзаменах ЕГЭ И ОГЭ.

Таким образом, при обучении математике встреча с алгоритмами неизбежна.

В 90-е годы 20-го века уменьшилось количество часов на изучение математики в школе. С первыми результатами введения новшества специалистами было установлено снижение общей успеваемости школьников. В настоящее время снижение количества часов на изучение математики в школе продолжается. В массовых школах общеобразовательного профиля большой процент детей имеет слабый уровень знаний. Переходя из класса в класс, они переносят с собой низкий уровень, который еще более снижается по понятным причинам. Мотивация на учение слаба. Мотивация школьника к учебе будет тем сильнее, чем более явно будет видна отдача его усилий. Это возможно, если у него будет некоторая дополнительная поддержка, кроме текста учебника. Отсюда и желание учителя дать слабым детям возможность восстановить свои знания, а вместе с ними и их самооценку, предложив определенный инструмент для обучения. Этот инструмент – алгоритм, как бы и чем бы мы его ни представляли, или называли [19, с. 121].

Глава 2. Алгоритмы решения задач с применением производной

Одной из основных тем, которые изучаются в курсе алгебры и начал анализа является решение задач с применением производной. В данной главе мы рассмотрим теорию по решению задач с применением производной и решение примеров по данной теме. Также проведем исследовательскую работу и дадим методические рекомендации по формированию алгоритмической культуры учащихся.

2.1 Понятие производной

Введем основное определение производной.

Определение. Пусть мы имеем функцию

$$y = f(x), \qquad (1)$$

определенную на некотором промежутке. При каждом значении аргумента x из этого промежутка функция $y = f(x)$ имеет определенное значение.

Пусть аргумент x получил некоторое (положительное или отрицательное – безразлично) приращение Δx. Тогда функция y получит некоторое приращение Δy. Таким образом:

при значении аргумента x будем иметь $y = f(x)$,

при значении аргумента $x + \Delta x$ будем иметь $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

Найдем приращение функции Δy:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \quad (2)$$

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (3)$$

Найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$. Если этот предел существует, то его называют производной данной функции $f(x)$ и обозначают $f'(x)$. Таким образом, по определению

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (4)$$

Следовательно, производной данной функции $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда последнее произвольным образом стремится к нулю.

Заметим, что в общем случае для каждого значения x производная $f'(x)$ имеет определенное значение, т. е. производная является также функцией от x.

Наряду с обозначением $f'(x)$ для производной употребляются и другие обозначения, например $y', y_x', \frac{dy}{dx}$. Конкретное значение производной при $x = a$ обозначается f'(a) или $y'\big|_{x=a}$.

Операция нахождения производной от функции $f(x)$ называется дифференцированием этой функции [6, с. 215].

Пример. Дана функция $y = x^2$; найти е производную y'.

1) в произвольной точке x,

2) при $x = 3$.

Решение. 1) При значении аргумента, равно x, имеем $y = x^2$. При значении аргумента, равно $x + \Delta x$, имеем $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$. Находим приращение функции: $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$. Составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$. Переходя к пределу, найдем производную от данной функции: $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$. Итак, производная от функции $y = x^2$ в произвольной точке равна $y' = 2x$.

3) При $x = 3$ получим $y'\big|_{x=3} = 2 \cdot 3 = 6$.

Ответ: 6.

2.2 Производные основных элементарных функций. Правила дифференцирования

1. $(\mathrm{C})' = 0$;

2. $(kx + b)' = k$;

3. $(e^x)' = e^x$;

4. $(x^n)' = nx^{n-1}$;

5. $(a^x)' = a^x \ln a$;

6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;

8. $(\sin x)' = \cos x$;

9. $(\cos x)' = -\sin x$;

10. $(tg\, x)' = \frac{1}{cos^2 x}$;

11. $(ctg\, x)' = -\frac{1}{sin^2 x}$;

12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

14. $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

15. $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ [11, с. 212].

Правила дифференцирования

1. $(CU)' = CU'$;

2. $(U + V)' = U' + V'$;

3. $(UV)' = U'V + UV'$;

4. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$;

5. $[V(U(x))]' = V'\big(U(x)\big)U'(x)$,

где С- постоянная, U и V – функции [11, с. 214].

Пример 1. Вычислить производную функции

$$f(x) = x^2 + x - 7.$$

Решение. Найдем производную:

$$f'(x) = 2x + 1.$$

Ответ: $2x + 1$.

Пример 2. Вычислить производную функции

$$f(x) = (x-5)(2x-5).$$

Решение. Найдем производную:

$$f'(x) = \big((x-5)(2x-5)\big)' = (x-5)'(2x-5) + (x-5)(2x-5)' =$$

$$= 1 \cdot (2x-5) + (x-5) \cdot 2 = 2x - 5 + 2x - 10 = 4x - 15.$$

Ответ: $4x - 15$.

Пример 3. Вычислить производную функции

$$f(x) = \frac{x-5}{2x-5}.$$

Решение. Найдем производную:

$$f'(x) = \frac{(x-5)'(2x-5) - (x-5)(2x-5)'}{(2x-5)^2} = \frac{(2x-5) - (x-5) \cdot 2}{(2x-5)^2} =$$

$$= \frac{2x - 5 - 2x + 10}{(2x-5)^2} = \frac{5}{(2x-5)^2}.$$

Ответ: $\frac{5}{(2x-5)^2}$.

Пример 4. Вычислить значение производной функции

$$f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos\frac{\pi}{3} - \frac{3}{\pi}x^2 \quad \text{при } x = \frac{\pi}{6}.$$

Решение. Найдем производную:

$$f'(x) = \sqrt{3}(\sin x)' + \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)' - \frac{3}{\pi}(x^2)' = \sqrt{3}\cos x - \frac{6}{\pi}x.$$

Подставим в точку $x = \frac{\pi}{6}$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} - \frac{6}{\pi}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

2.3 Геометрический смысл производной

Производная $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$,который в свою очередь, равен тангенсу угла наклона α касательной к положительному направлению оси Ox, то есть $f'(x_0) = k = tg\alpha$.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, проведенной в точке касания $M_0(x_0, f(x_0))$, имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \text{ [17, с. 67].}$$

Пример 1.Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = sin2x$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Найдем производную функции $f'(x) = 2\cos 2x$. Тогда $k = f'(0) = 2$.

Ответ: $k = 2$.

Пример 2. Найти угол наклона касательной к графику функции $f(x) = 4x - x^3$ в точке $x_0 = -1$.

Решение. Найдем производную функции $f'(x) = 4 - 3x^2$. Тогда $f'(-1) = 1$, то есть $tg\alpha = 1$, откуда α = $arctg\ 1 = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: α = $\frac{\pi}{4}$.

Пример 3. Составить уравнение касательной к графику функции

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2}{x - 1}$$

в точке её пересечения с осью ординат.

Решение. Найдем точку касания. Ось ординат дает $x_0 = 0$. Тогда $f(0) = -2$. Таким образом, точка касания (0, - 2). Найдем производную:

$$f'(x) = \frac{6x(x - 1) - (3x^2 + 2)}{(x - 1)^2} = \frac{3x^2 - 6x - 2}{(x - 1)^2}.$$

Тогда производная в точке касания $f'(0) = -2$. Подставляя в уравнение касательной, имеем $y - (-2) = -2(x - 0)$; $y = -2x - 2$.

Ответ: $y = -2x - 2$.

2.4 Исследование функций с помощью производных

Напомним определения монотонных функций. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке *X*, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на промежутке *X*, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Для определения интервалов возрастания и убывания функций используются следующие утверждения:

1. Если производная функции положительна (неотрицательна) $f'(x) > 0$ $(f'(x) \geq 0)$ на интервале (*a*, *b*), то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.

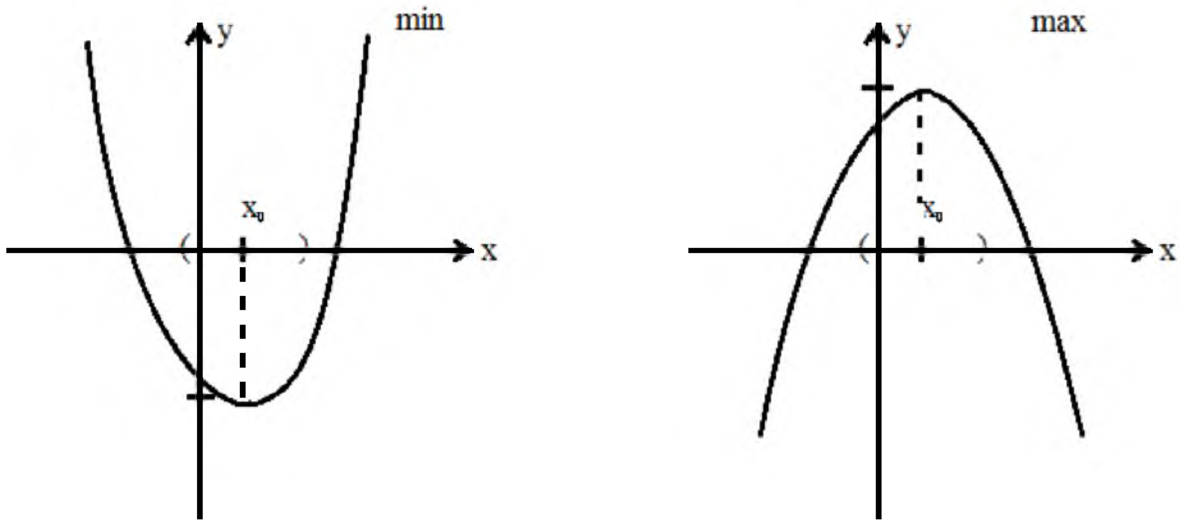
2. Если производная функции отрицательна (неположительная) $f'(x) < 0$ $(f'(x) \leq 0)$ на интервале то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.

А теперь дадим определения точек максимума и минимума.

Точка x_0 называется точкой максимумам функции $f(x)$, если найдется такая окрестность этой точки x_0 (то есть найдется интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$), что при всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \geq f(x)$. Обратим внимание на то, что неравенство должно выполняться только в маленькой окрестности. Поэтому говорят о локальном максимуме.

Аналогично точка x_0 называется точкой минимума функции $f(x)$, если найдется такая окрестность этой точки (то есть найдется интервал ($x_0 - \delta, x_0 + \delta$)), что при всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \leq f(x)$. Так как неравенство должно выполняться только в маленькой окрестности, то говорят о локальном минимуме [13, с. 20].

Точки максимума и минимума называют точками экстремума.



Алгоритм нахождения экстремума функции:

1. Найти критические точки функции (то есть точки, в которых производная функции равна нулю или не существует).

2. На числовой оси отметить область определения функции и критические точки.

3. На каждом интервале области определения выяснить знак производной и, соответственно, интервалы возрастания и убывания функции.

4. Если производная функции при переходе через точку x_0 меняет знак с плюса на минус, то данная точка есть точка максимума, если с минуса на плюс, то это точка минимума. Если знак производной не меняется при переходе через точку, то в данной точке нет ни максимума, ни минимума [13, с. 22].

Пример 1. Найти интервал возрастания и убывания функции, и точки экстремума:

$$f(x) = \frac{x^5}{5} - x^4 + x^3 - 10.$$

Решение. Заметим, что область определения функции – вся числовая прямая. Найдем производную функции:

$$f'(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$$

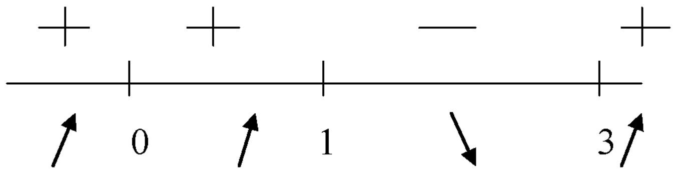
и приравняем ее к нулю:

$$x^2(x^2-4x+3)=0,$$

откуда получаем следующие критические точки

$$x_1=0, x_2=1, x_3=3.$$

Отмечаем эти точки на координатной прямой и исследуем знак производной.



Из рисунка видно, что функция убывает на интервале $x \in (1,3)$ и возрастает при $x \in (-\infty; 1) \cup (3, +\infty)$, точка $x=1$ является точкой максимума, а $x=3$ - точкой минимума. Заметим, что в точке $x=0$ нет ни максимума, ни минимума [6]. Вычислив значения функции в точках $x_1=1, x_2=3$, найдем экстремумы функции:

$$f(1)=\frac{1}{5}-1+1-10=-\frac{49}{5}=-9\frac{4}{5}=-9{,}8\,,$$

$$f(3)=\frac{243}{5}-81+27-10=\frac{243}{5}-64=-\frac{77}{5}=-15\frac{2}{5}=-15{,}4.$$

Ответ: функция убывает на интервале $x \in (1,3)$ и возрастает при $x \in (-\infty; 1) \cup (3, +\infty)$; $f(1)=-9{,}8\,, f(3)=-15{,}4.$

Пример 2. Найти интервал возрастания и убывания функции, и точки экстремума:

$$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+3x^2-5x-1.$$

Решение. Заметим, что область определения функции – вся числовая прямая. Найдем производную функции:

$$f'(x)=-x^2+6x-5$$

$$f'(x)=x^2-6x+5$$

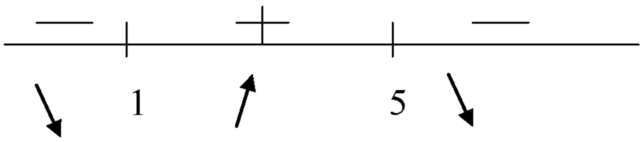
и приравняем ее к нулю:

$$x^2-6x+5=0,$$

откуда получаем следующие критические точки

$$x_1=1, x_2=5.$$

Отмечаем эти точки на координатной прямой и исследуем знак производной.



Из рисунка видно, что функция убывает при $x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$ и возрастает на интервале $x \in (1, 5)$, точка $x = 1$ является точкой минимума, а $x = 5$ - точкой максимума. Вычислив значения функции в точках $x_1 = 1, x_2 = 5$, найдем экстремумы функции:

$$f(1) = -\frac{1}{3} + 3 - 5 - 1 = -\frac{10}{3} = -3\frac{1}{3},$$

$$f(5) = -\frac{1}{3} \cdot 125 + 3 \cdot 25 - 5 \cdot 5 - 1 = -\frac{125}{3} + 75 - 25 - 1 = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}.$$

Ответ: функция убывает при $x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$ и возрастает на интервале $x \in (1, 5)$; $f(1)$= - $3\frac{1}{3}$, $f(5) = 7\frac{1}{3}$.

Пример 3. Найти интервал возрастания и убывания функции, точки максимума и минимума:

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1.$$

Решение. Заметим, что область определения функции – вся числовая прямая. Найдем производную функции:

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$$

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6$$

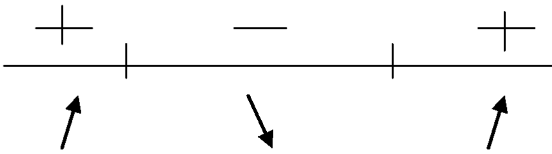
и приравняем ее к нулю:

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

откуда получаем следующие критические точки

$$x_1 = 2, x_2 = 3.$$

Отмечаем эти точки на координатной прямой и исследуем знак производной.



2 3

Из рисунка видно, что функция возрастает при $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ и убывает на интервале $x \in (2, 3)$, точка $x = 2$ является точкой максимума, а $x = 3$ - точкой минимума.

Ответ: функция возрастает при $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ и убывает при $x \in (2, 3); max = 2, min = 3$.

Пример 4. Исследовать функцию $f(x) = x^4 - 1$ на экстремум.

Решение. Находим производною заданной функции:

$$f'(x) = 4x^3$$

и приравняем ее к нулю:

$$4x^3 = 0,$$

откуда получаем одну критическую точку

$$x = 0.$$

Отмечаем эту точку на координатной прямой и исследуем знак производной слева и справа от этой точки.

— +

0

Так как при переходе через точку $x = 0$ производная сменила свой знак с «-» на «+», то в этой точке функция достигает минимума (или минимального значения), причем $f_{min} = f(0) = 0^4 - 1 = -1$.

Ответ: $f_{min} = 1$.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на промежутке $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$:

1.Найти значения функции на концах отрезка: $f(a)$ и $f(b)$.

2.Найти значения функции в критических точках (то есть в точках, где производная равна нулю или не существует), принадлежащих интервалу (a, b).

3.Из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее [13, с.34].

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \frac{x^4}{2} - 2x + \frac{3}{2} \text{ на отрезке } x \epsilon \, [-1, 2].$$

Решение. Функция достигает своего наибольшего и наименьшего значений на отрезке либо в точках экстремума, либо на концах этого отрезка. Поэтому найдем производную функции и приравняем ее к нулю:

$$f'(x) = 2x^3 - 2$$

$$2x^3 - 2 = 0$$

откуда получаем, что

$$x = 1.$$

Имеем единственную критическую точку $x = 1$, которая принадлежит заданному отрезку. Найдем значения функции в точке $x = 1$и на концах отрезка и выберем наибольшее и наименьшее значения. Так как $f(-1) = 4$, $f(1) = 0, f(2) = 5{,}5$,то получаем, что функция имеет наибольшее значение, равное $f_{\text{наиб.}} = 5{,}5$ при $x = 2$, и наименьшее - $f_{\text{наим.}} = 0$ при $x = 1$.

Ответ: $f_{\text{наиб.}} = 5{,}5$; $f_{\text{наим.}} = 0$.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 4x \text{ на отрезке } x \epsilon \, [0, 2].$$

Решение. Функция достигает своего наибольшего и наименьшего значений на отрезке либо в точках экстремума, либо на концах этого отрезка. Поэтому найдем производную функции и приравняем ее к нулю:

$$f'(x) = \frac{4}{3} \cdot 3x^2 - 4 = 4x^2 - 4$$

$$4x^2 - 4 = 0$$

Откуда получаем, что

$$x_1 = 1, x_2 = -1.$$

Точки $x_1 = 1, x_2 = -1$ - точки возможного экстремума. При этом $x_1 \epsilon \, [0, 2]$, $x_2 \notin [0, 2]$. Найдем значения функции в точке $x_1 = 1$и на концах отрезка и выберем наибольшее и наименьшее значения. Так как $f(1) = -\frac{8}{3}, f(0) = 0$,

$f(2) = \frac{8}{3}$, то получаем, что функция имеет наибольшее значение, равное $f_{\text{наиб.}} = \frac{8}{3}$ при $x = 2$, и наименьшее - $f_{\text{наим.}} = -\frac{8}{3}$ при $x = 1$.

Ответ: $f_{\text{наиб.}} = \frac{8}{3}$; $f_{\text{наим.}} = -\frac{8}{3}$.

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x \text{ на отрезке } x\epsilon\ [0, 3].$$

Решение. Функция достигает своего наибольшего и наименьшего значений на отрезке либо в точках экстремума, либо на концах этого отрезка. Поэтому найдем производную функции и приравняем ее к нулю:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$

$$6x^2 - 18x + 12 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Откуда получаем, что

$$x_1 = 1, x_2 = 2.$$

Точки $x_1 = 1, x_2 = -1$ - точки возможного экстремума. При этом $x_1\epsilon\ [0, 2]$ и $x_2\epsilon[0, 2]$. Найдем значения функции в точке $x_1 = 1, x_2 = 2$ и на концах отрезка и выберем наибольшее и наименьшее значения. Так как $f(1) = -3$, $f(2) = -4$,$f(0) = -8$, $f(3) = 1$,получаем, что функция имеет наибольшее значение, равное $f_{\text{наиб.}} = 1$ при $x = 3$, и наименьшее -$f_{\text{наим.}} = -8$ при $x = 0$.

Ответ: $f_{\text{наиб.}} = 1$; $f_{\text{наим.}} = -8$.

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90 \text{ на отрезке } x\epsilon\ [-4, 5].$$

Решение. Функция достигает своего наибольшего и наименьшего значений на отрезке либо в точках экстремума, либо на концах этого отрезка. Поэтому найдем производную функции и приравняем ее к нулю:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 72$$

$$3x^2 + 6x - 72 = 0$$

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

Откуда получаем, что

$$x_1 = 4, x_2 = -6.$$

Точки $x_1 = 4, x_2 = -6$ - точки возможного экстремума. При этом $x_1 \epsilon\ [-4, 5]$ и $x_2 \notin [-4, 5]$. Найдем значения функции в точке $x_1 = 4$ и на концах отрезка и выберем наибольшее и наименьшее значения. Так как $f(4) = -86$, $f(-4) = 362$, $f(5) = -70$, получаем, что функция имеет наибольшее значение, равное $f_{\text{наиб.}} = 362$ при $x = -4$, и наименьшее -$f_{\text{наим.}} = -86$ при $x = 4$.

Ответ: $f_{\text{наиб.}} = 362$; $f_{\text{наим.}} = -86$.

Пример 5. Найти разницу между наибольшим и наименьшим значением функции

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 225 \text{ на отрезке } x\epsilon\ [0, 6].$$

Решение. Функция достигает своего наибольшего и наименьшего значений на отрезке либо в точках экстремума, либо на концах этого отрезка. Поэтому найдем производную функции и приравняем ее к нулю:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 45$$

$$3x^2 - 6x - 45 = 0$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

Откуда получаем, что

$$x_1 = 5, x_2 = -3.$$

Точки $x_1 = 5, x_2 = -3$ - точки возможного экстремума. При этом $x_1 \epsilon\ [0, 6]$ и $x_2 \notin [0, 6]$. Найдем значения функции в точке $x_1 = 5$ и на концах отрезка и выберем наибольшее и наименьшее значения. Так как $f(5) = 50, f(0) = 225, f(6) = 63$, получаем, что функция имеет наибольшее значение, равное $f_{\text{наиб.}} = 225$ при $x = 0$, и наименьшее -$f_{\text{наим.}} = 50$ при $x = 5$.

Находим разницу между наибольшим и наименьшим значением функции

$$f_{\text{наиб.}} - f_{\text{наим.}} = 225 - 50 = 175.$$

Ответ: 175.

2.5 Решение текстовых задач

Рассмотрим решение текстовых задач на наибольшее или наименьшее значение.

Алгоритм решения текстовых задач:

1. Определить величину y, наибольшее или наименьшее значение которой требуется найти.

2. Выбрать одну из известных величин в качестве независимой переменной x.

3. Установить границы изменения величины x: X.

4. Исходя, из условий задачи выразить y через x и известные величины, то есть представить y в виде функции от переменной x: $y = f(x)$.

5. Найти наибольшее (наименьшее) значение функции $y = f(x)$ на промежутке X реального изменения переменной x [27, с. 50].

6. Интерпретировать полученный результат, исходя из условий задачи.

Пример 1. На параболе $y = x^2$ найти точку, ближайшую к точке (-3,0).

Решение. В нашем случае, требуется, чтобы расстояние между точками параболы (x, x^2) и заданной точкой (-3,0) было наименьшим. Вспомним формулу расстояния между двумя точками $A(x_1, y_1)$и $B(x_2, y_2)$ на плоскости:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Заметим, что удобнее использовать квадрат расстояния, который мы и возьмем за искомую величину:

$$f(x) = AB^2 = (x+3)^2 + (x^2 - 0)^2 = (x+3)^2 + x^4,$$

где x- любое действительное число.

Найдем производную полученной функции:

$$f'(x) = 2(x+3) + 4x^3 = 2(x+1)(2x^2 - 2x + 3),$$

которая обращается в нуль только при $x = -1$.

$-$ $+$

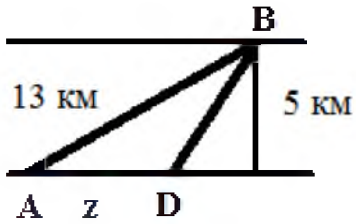
$\searrow$ -1 $\nearrow$

Таким образом, точка $x = -1$ является искомой точкой минимума. Учитывая, что по условию задачи требуется найти точку на графике функции, имеем ответ: (-1,1).

Ответ: (-1,1).

Пример 2. Пункты A и B , расстояние между которыми 13 км, находятся на противоположных берегах реки шириной 5 км. Почтальон может двигаться по суше со скоростью 5 км/ч и по воде со скоростью 3 км/ч. Какую часть пути почтальон должен двигаться по суше, чтобы доставить почту из A в B за наименьшее время?

Решение. Построим чертеж. Имеем $AB = 13$, $BD = 5$, $BD \perp AB$.



Тогда по теореме Пифагора $AD = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Пусть почтальон двигается по берегу x км/ч, то есть $AC = x$. Заметим, что $0 \leq x \leq 12$. Тогда по воде он проедет расстояние:

$$BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{5^2 + (12 - x)^2}.$$

Суммарное время движения почтальона в часах равно

$$T(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{25 + (12 - x)^2}}{3},$$

причем $T(0) = 4\frac{1}{3}$ и $T(12) = 4\frac{1}{15}$.

Рассмотрим производную

$$T'(x) = \frac{1}{5} + \frac{12 - x}{3\sqrt{25 + (12 - x)^2}} = \frac{3\sqrt{25 + (12 - x)^2} - 5(12 - x)^2}{15\sqrt{25 + (12 - x)^2}} = 0.$$

Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля (что выполнимо в нашем случае):

$$3\sqrt{25+(12-x)^2}-15(12-x)=0.$$

Решим данное иррациональное уравнение, перенося одно из слагаемых в правую часть и возведя обе части уравнения в квадрат (заметим, что обе части уравнения неотрицательны, поэтому посторонние корни не появляются):

$$9(25+(12-x)^2)=25+(12-x)^2.$$

Откуда

$$(12-x)^2=\frac{225}{16}=\left(\frac{15}{4}\right)^2;x=12\pm\frac{15}{4}.$$

Так как $0\le x\le 12$, то $x=12-\frac{15}{4}=\frac{33}{4}$ и $T\left(\frac{33}{4}\right)=\frac{56}{15}=3\frac{11}{15}$. В силу неравенств $T\left(\frac{33}{4}\right)<T(0)$ и $T\left(\frac{33}{4}\right)<T(12)$ имеет минимум в точке $x=\frac{33}{4}=8{,}25$.

Таким образом, почтальон должен пройти 8,25, чтобы доставить почту за наименьшее время.

Ответ: 8,25.

Пример 3. Себестоимость изготовления *n* изделий равна

$$2n^2+25n+62$$

рублей. При каком *n* себестоимость изготовления одного изделия минимальна?

Решение. Себестоимость изготовления одного изделия равна

$$2n+25+\frac{62}{n}$$

рублей. Чтобы найти ее минимум, рассмотрим функцию непрерывного аргумента

$$f(x)=2x+25+\frac{62}{x}.$$

Производная функции

$$f'(x) = 2 - \frac{62}{x^2} = \frac{2x^2 - 62}{x^2} = \frac{2(x^2 - 31)}{2} = 0$$

при $x = \pm\sqrt{31}$. Нас интересует только значение $\sqrt{31}$. Так как n – число натуральное, $5 < \sqrt{31} < 6$ и $f'(5) < 0$, $f'(6) > 0$, то $x = \sqrt{31}$ - точка минимума функции $f(x)$. Но количество изделий должно выражаться натуральным числом, поэтому рассмотрим ближайшие натуральные числа к $\sqrt{31}$ и выберем то, при котором функция себестоимости достигает минимума. Себестоимость одного изделия при $n = 5$ равна $f(5) = 47\frac{2}{5}$ рублей, а при $n = 6$ равна $f(6) = 47\frac{1}{3}$ рублей. Так как $47\frac{2}{5} > 47\frac{1}{3}$, то минимальная себестоимость одного изделия получается при $n = 6$.

Ответ: $n = 6$.

2.6 Задачи с параметром

Пример 1. Найти все значения p, при которых уравнение

$$4\sin^3 x = p - 3\cos 2x$$

не имеет корней.

Решение. Преобразуем уравнение

$$p = 4\sin^3 x + 3(1 - 2\sin^2 x);$$

$$p = 4\sin^3 x - 6\sin^2 x + 3.$$

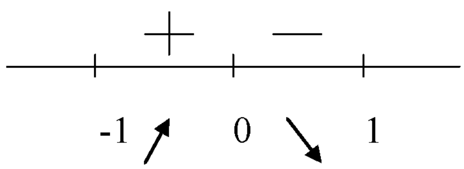
Заменим, что $t = \sin x, t \in [-1, 1]$ и исследуем функцию

$$y = 4t^3 - 6t^2 + 3 \text{ на промежутке } t \in [-1, 1].$$

Производная данной функции равна

$$y' = 12t^2 - 12t = 0 \text{ при } t = 0, t = 1.$$

Тогда на промежутке $t \in [-1, 1]$ имеем картинку:



Так как $t = 0$ – точка максимума,

$$y(0) = 3, y(-1) = -7, y(1) = 1,$$

то наименьшее значение функции на промежутке $t \in [-1, 1]$ равно - 7, наибольшее - 3.

В силу непрерывности функции $y = 4t^3 - 6t^2 + 3$ она принимает все значения из промежутка $y \in [-7, 3]$. Тогда исходное уравнение не имеет корней при $p \notin [-7, 3]$, то есть мы имеем $p \in (-\infty, -7) \cup (3, +\infty)$.

Ответ: $p \in (-\infty, -7) \cup (3, +\infty)$.

Пример 2. Найти наибольшее значение параметра a, при котором $x = 6$, является точкой экстремума функции:

$$y = (x - a)^3 - 3x + a.$$

Решение. Найдем производную

$$y' = 3(x - a)^2 - 3.$$

$$y(6) = 3(6 - a)^2 - 3.$$

Приравняем к нулю

$$3(6 - a)^2 - 3 = 0$$

$$(6 - a)^2 = 1$$

$$6 - a = 1 \qquad\qquad 6 - a = -1$$

$$a = 5 \qquad\qquad a = 7$$

Ответ: $a = 7$.

Пример 3. При каких значениях a функция

$$f(x) = ax^3 - 6x^2 + 4x + 7$$

имеет одну стационарную точку.

Решение: Вспомним, что такое стационарные точки. Стационарные точки – это точки, в которых производная равна нулю.

Найдем производную функции:

$$f'(x) = 3ax^2 - 12x + 4,$$

приравняем значение производной к нулю

$$3ax^2 - 12x + 4 = 0,$$

$$D = 144 - 48a = 36 - 12a = 6 - 2a = 3 - a,$$

$$3 - a = 0,$$

$$a = 3.$$

Ответ: $a = 3$.

Пример 4. При каком значении параметра a касательная, проведенная к графику функции $y = 2x + \frac{a}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$, параллельна прямой $y = -5x + 4$.

Решение: Если касательная, проведенная к графику функции в точке параллельна некоторой прямой, то производная функции в точке касания равна угловому коэффициенту прямой. Найдем производную функции в точке с абсциссой $x_0 = 1$:

$$y' = 2 - \frac{a}{x^2};$$

$$y' = -5.$$

Приравняем значения производных:

$$2 - \frac{a}{x^2} = -5,$$

$$a = 7.$$

Ответ: $a = 7$.

Применение производной очень широко и его сложно полностью охватить в работе такого типа, однако мы попытались раскрыть основные, базовые моменты. В наше время, в связи с научно-техническим прогрессом, в частности с быстрой эволюцией вычислительных систем, дифференциальное исчисление становится все более актуальным в решении как простых, так и сложных задач.

2.7 Методические рекомендации по формированию алгоритмической культуры при изучении в курсе «Алгебра и начала математического анализа» темы «Производная»

Большая роль при формировании алгоритмической культуры у учащихся отводится курсу алгебры и начал математического анализа.

При изучении курса алгебры и начал математического анализа устойчивые математические навыки вырабатываются наиболее успешнее, если ввести в учебный процесс, определенный план решения задач.

Применяя планы решения задач в процессе обучения математике, нужно направлять учащихся на то, что им не надо просто запоминать план решения задачи, главное – понять каждый шаг этого плана действий. И уже при решении задачи выполнять ее осознанно, а не автоматически.

При составлении такого плана необходимо руководствоваться следующими принципами (рассмотренными ранее в первой главе):

1. Теоретический фундамент плана должны составлять теоретические сведения, имеющие непосредственное к нему отношение.
2. Система предписаний, имея дискретный характер, должна быть общей по отношению к целому классу однородных задач.
3. По содержанию система предписаний должна быть полной или достаточной, т.е. обеспечивать на каждом конкретном шаге учебной деятельности учащихся однозначное получение промежуточной информации, которая в своем комплексе гарантирует получение конечного результата.
4. Система предписаний должна быть совместной или непротиворечивой, т.е. каждое предыдущее предписание (или группа предписаний) должно являться малой посылкой (подводящей) для последующего, а последующее – логическим следствием предыдущих.
5. Число пунктов плана не должно быть большим (предельная норма 5-6 пунктов).
6. Система предписаний должна обеспечивать многократное решение однотипных задач, т.е. обладать свойством массовости [27, с. 103].

Нами была разработана система специальных карточек. Каждая карточка отражает определенный вопрос программы и предусматривает отработку соответствующего ее названию плана, который скоординирован в таблицу.

Структура карточек одна и та же. Каждая из них включает план, основные сведения из теории, иллюстрацию применения плана к решению задач. Наряду с формулировкой любого шага плана показано его практическое применение. Это обеспечивает работу учащихся по образцу на каждом этапе выработки учебного навыка.

Вот некоторые примеры карточек:

Пример 1. Производная функции.

Определение (рассмотренное ранее в параграфе 2.1). Производная функции $y = f(x)$ в заданной точке x называется предел отношения приращения функции Δy в этой точке к приращению аргумента Δx, когда Δx стремится к нулю, т.е.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Задание: Вычислите производную с использованием определения производной функции $f(x)$ в точке $x_0 = 2$, если: $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$.

№ шага	План вычисления производной функции	Применение плана $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$
1	Фиксируем точку x и даем аргументу приращение Δx	$x, x + \Delta x$
2	Вычисляем приращение функции: $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$	$\Delta f = (3(x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) +$ *1−3x2−5x+1 =* $=6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 5\Delta x$
3	Находим отношение приращения функции к приращению аргумента: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x(6x + 3\Delta x - 5)}{\Delta x} =$ $= 6x + 3\Delta x - 5$
4	Вычисляем производную: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$	$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}(6x + 3\Delta x - 5) =$ $=6x - 5$
5	Вычисляем $f'(x_0)$	$f'(2) = 6 \cdot 2 - 5 = 7$

Пример 2. Наименьшее и наибольшее значение.

Задание. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 - 3$ на промежутке [0; 2].

№ шага	План нахождения $y_{\text{наиб.}}$ и $y_{\text{наим.}}$ на$[a; b]$	Применение плана
1	Находим производную функции	$y' = 4x^3 - 4x$
2	Находим критические точки функции, т.е производную приравниваем к нулю	$4x^3 - 4x = 0,$ $4x(x^2 - 1) = 0,$ $x = 0$ и $x^2 - 1 = 0,$ $x = 0, x = 1, x = -1$ это и есть критические точки функции
3	Выбираем критические точки, лежащие внутри $[a; b]$	0 и 1∈[0; 2]
4	Находим значения функции в критических точках (внутри данного отрезка) и на концах отрезка	$y(1) = 1 - 2 - 3 = -4,$ $y(0) = -3,$ $y(2) = 16 - 8 - 3 = 5$
5	Из найденных значений выбираем наименьшее или наибольшее	$y_{\text{наим.}} = y(1) = -4,$ $y_{\text{наиб.}} = y(2) = 5$

Пример 3. Возрастание и убывание функции.

Задание. Найти интервал возрастания и убывания функции $f(x) = x^2 - x - 6.$

№ шага	План нахождения возрастания и убывания функции	Применение плана
1	Находим производную функции	$f'(x) = 2x - 1$
2	Находим критические точки функции, т.е производную приравниваем к нулю	$2x - 1 = 0,$ $2x = 1,$

		$x = \frac{1}{2}$, это и есть критическая точка функции
3	Отмечаем точку на координатной прямой и исследуем знак производной	$-$ $\frac{1}{2}$ $+$
4	Выписываем интервал, на котором функция возрастает	Из рисунка видно, что функция возрастает на интервале $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
5	Выписываем интервал, на котором функция убывает	Из рисунка видно, что функция убывает на интервале $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

Полученная разработка была апробирована в 10 классе, в МОУ «Графовская средняя общеобразовательная школа» Белгородской области, Краснояружского района при изучении темы: «Производная. Применение производной».

После изучения темы: «Производная. Применение производной» детям, в количестве 6 человек, было предложено решить самостоятельную работу, для проверки своих знаний по изученной теме. Самостоятельная работа состоит из двух вариантов, в каждом варианте по 4 задания.

Самостоятельная работа №1 по теме «Производная, применение производной».

Вариант 1.

1. Найдите производную для следующих функций:

а) $f(x) = 5x^2 + 4x - 5$, б) $f(x) = 3x^{10} - 4x^3$, в) $f(x) = \frac{4-6x}{3x+1}$.

2. Укажите промежутки убывания и точку максимума функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$.
3. Дана функция $f(x) = x^2 - x - 6$. Найдите промежутки убывания, возрастания и точки минимума функции.

4. Укажите разность наибольшего и наименьшего значений функции $f(x) = 0{,}25x^4 - 2x^2 + 1$ на промежутке [-1; 4].

Вариант 2.

1. Найдите производную для следующих функций:

а) $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$, б) $f(x) = 6x^5 + 5x^4$, в) $f(x) = \frac{2x+4}{3-8x}$.

2. Укажите промежутки возрастания и точку минимума функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4$.

3. Дана функция $f(x) = -x^2 - x + 12$. Найдите промежутки убывания, возрастания и точки максимума функции.

4. Укажите разность наибольшего и наименьшего значений функции $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ на промежутке $[0, 3]$.

Результаты самостоятельной работы были таковы:

С первым заданием правильно справилось 5 человек, 1 человек в первом задание справился только с заданием *а* и *в*. Со вторым заданием правильно справились 3 человека, 1 человека не правильно определил на координатной прямой знак производной, 2 человека нашли только производную функции. С третьим заданием правильно справились 4 человека, 2 человека нашли только производную функции. С четвертым заданием справились 3 человека, 3 человека не правильно вычислили наибольшее и наименьшее значение функции.

Нами было предложено провести несколько уроков для закрепления данной темы с использованием разработанных нами специальных карточек. После проведения дополнительных уроков мы также провели самостоятельную работу. Она также как и предыдущая самостоятельная работа состоит из двух вариантов, в каждом варианте по 4 задания.

Самостоятельная работа №2 по теме «Производная, применение производной».

Вариант 1.

1. Найдите производную для следующих функций:

а) $f(x) = 5x^8 - 7x^6$, б) $f(x) = 3x^2 - 4x + 11$, в) $f(x) = \frac{6-5x}{2x+1}$.

2. Укажите промежутки убывания и точку максимума для функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$.
3. Дана функция $f(x) = 2x + x^2 - 3$. Найдите промежутки убывания, возрастания и точки минимума функции.

4. Укажите разность наибольшего и наименьшего значений функции

$f(x) = 0{,}25x^4 - 2x^2 + 1$ на промежутке [-1; 4].

Вариант 2.

1. Найдите производную для следующих функций:

а) $f(x) = 5x^2 + 7x - 3$, б) $f(x) = 9x^6 - 3x^7$, в) $f(x) = \frac{4x+3}{3-5x}$.

2. Укажите промежутки возрастания и точку минимума для функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4$.
3. Дана функция $f(x) = -9 - x^2 - 6x$. Найдите промежутки убывания, возрастания и точки максимума функции.
4. Укажите разность наибольшего и наименьшего значений функции $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ *на промежутке* $[0, 3]$.

Ее результаты таковы:

С первым заданием правильно справилось 5 человек, 1 человек в первом задание справился только с заданием *а* и *в*. Со вторым заданием правильно справилось 4 человека, 2 человека нашли только производную функции. С третьим заданием правильно справились 4 человека, 2 человека нашли только производную функции. С четвертым заданием справились 4 человека, 2 человека не правильно вычислили наибольшее и наименьшее значение функции.

Можно сделать вывод, что разработанная нами система карточек помогла лучше усвоить тему «Производная». Данная методика показывает, что система планов решения задач позволяет в определенной мере автоматизировать учебный процесс на этапе формирования навыков в решении типовых задач и создает широкие возможности для активной самостоятельной работы учащихся, что способствует формированию алгоритмической культуры у учащихся.

Заключение

Настоящая работа представляет собой один из путей совершенствования методики преподавания математики в общеобразовательной школе.

В работе решены следующие конкретные задачи, выдвинутые в связи исследованием проблемы, и получены следующие основные результаты:

1. Рассмотрена актуальность проблемы формирования алгоритмической культуры.
2. Раскрыта сущность алгоритмической культуры школьника. Основным понятием можно считать следующее определение: под алгоритмической культурой принято понимать совокупность специфических «алгоритмических» представлений, умений и навыков, которые на современном этапе развития общества должны составлять часть общей культуры каждого человека и, следовательно, определять целенаправленный компонент общего школьного образования.
3. Рассмотрено применение алгоритмов при решении математических задач, а именно при решении задач с применением производной.
4. Даны методические рекомендации по формированию алгоритмической культуры школьников на уроках алгебры и начал анализа.

Была проведена исследовательская работа, в исследовании показано, что данная методическая разработка может быть использована при организации обучения на уроках математики.

Список используемой литературы

1. Алгоритмическая культура. Визуальный словарь [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.ped.vslovar.ru/63.html, свободный.

2. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов: Пер. с англ.-М.: Мир,1979.- 173с.

3. Агалаков С.А. Система дополнительных занятий по математике. 10 класс. Омск: НОУ НОК «Образование Плюс», 2003.- 219 с.

4. Агалаков С.А. Система дополнительных занятий по математике. 11 класс. Омск: НОУ НОК «Образование Плюс», 2003. -235 с.

5. Википедия: Свободная энциклопедия. [Электронный ресурс] / Электронные текстовые данные. – Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/wiki/ дистанционное обучение, свободный.

6. Виленкин Н.Я. и Шварцбург С.И. Математический анализ. Учеб. Пособие для 9 -10 классов средних школ с мат. специализацией. М.: «Просвещение», 1969. -211 с.

7. Жиброва Н.А. Методический анализ материала школьной алгебры с точки зрения использования алгоритмических предписаний. [Текст] // Метод. рекомендации к практическим занятиям по метод. препод. мат. в ср. шк. и ср. ПТУ: Сб. статей / Н.А. Жиброва.-М.: МГПИ им. В.И. Ленина, 1984. – 364с.

8. Жилина Е.И. Алгоритмическая и алгебраическая линии в изучении числовых систем в курсе математики VI-X классов. [Текст] / Е.И. Жиброва.-М.: МГПИ им. В.И. Ленина, 1980. – 287 с.

9. Задачи по математике. Алгебра. / Справочное пособие. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. М.: «Наука», 1987.- 432 с.

10. История развития понятия алгоритм. Интернет ресурс: letopisi.org/index.php/История алгоритма.

11. Колмогоров А.Н. алгебра и начала анализа. Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.: Под ред. А.Н. Колмогорова. - 2-е изд.- М.: «Просвещение», 1991.-240 с.

12. Ланда Л. Н. Алгоритмизация в обучении / под общ. ред.: Б. В. Гнеденко, Б. В. Бирюкова; – М.: Просвещение, 1966. – 523 с.

13. Латыпова Н.В. Производная функции и ее применение: Учебно-методическое пособие. Изд. ГОУВПО «Уд. ГУ». Ижевск, 2009.- 60 с.

14. Математическая логика и вычислительная математика // Вестник Академии наук СССР. №8. — 165 с.

15. Монахов, В.М. Формирование алгоритмической культуры школьников при обучении математике. [Текст] / В.М. Монахов и др.- М.: Просвещение, 1978. – 250 с.

16. Ожегов С.И. Словарь русского языка. Электронный ресурс: http://enc-dic.com/ozhegov/Algoritm-330/

17. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов, т.1: Учебное пособие для вузов. – 13-е изд. – М.: «Наука», 1985.- 267 с.

18. Повышение эффективности обучения математике в школе: Кн. для учителя: Из опыта работы / Г.Д. Глейзер - М.: Просвещение, 1989 – 240 с.

19. Поспелов, Н.Н. Формирование мыслительных операций у старшеклассников [Текст] / Н.Н. Поспелов, И.Н. Поспелов.- М.: Педагогика, 1989. – 243 с.

20. Прокопенко Т. К. Применение алгоритмов на уроках математики как средство повышения качества знаний. Интернет ресурс: http://www.beluo.ru/u/mkunmic/doc/Procopenco.doc

21. Психологический словарь / Под ред. В. П. Зинченко, Б.Г.Мещерякова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Педагогика-Пресс, 1997. – 440 с.

22. Российский энциклопедический словарь: В 2 кн. - / Гл. ред.: А.М.Прохоров. – М.: Большая Российская энциклопедия, 2001. – 286 с.

23. Старокожева Е.И. Курс лекций. Методика преподавания математики в основной школе. Лекция 8. Формирование алгоритмической культуры учащихся. 2008. Интернет ресурс: http://refdb.ru/look/1393028-pall.html

24. Темербекова, А.А. Формирование алгоритмической культуры учащихся [Электронный ресурс] / А.А. Темербекова. – Электронные текстовые данные, 2006. – Режим доступа: http://www.fmf.gasu.ru/kafedra/algebra/elib/mpm_t/10.htm, свободный.

25. Три тысячи конкурсных задач по математике 2-е изд., испр. и доп. - М.: Рольф, Айрис-пресс, 1998. -141 с.

26. Формирование алгоритмической культуры школьника при обучении математике. Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1978. – 255с.

27. Цукарь, А.Я. Схематизация и моделирование при решении текстовых задач [Текст] /А.Я. Цукарь // Математика в школе, 2003. – 196 с.

28. Шеин, И.Г. Алгоритмический подход к обучению математике. [Текст] / И.Г.Шеин.-Л.: ЛГПИ им. А.И. Герцена, 1983. – 220 с.