ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

# «БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

## (НИУ «БелГУ»)

# ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ, ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫХ ДИСЦИПЛИН И МЕТОДИК ПРЕПОДАВАНИЯ

## ВЛИЯНИЕ МНОГОКРАТНОГО РАССЕИВАНИЯ РЕЛЯТИВИСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В МОНОКРИСТАЛЛЕ НА СПЕКТРАЛЬНО-УГЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОГЕРЕНТНО-РЕНГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Выпускная квалификационная работа обучающегося по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование по профилю «Физика и математика» очной формы обучения, группы 02041201 Ефимцевой Дарьи Николаевны

> Научный руководитель д.ф.-м.н.,профессор Носков А.В.

## БЕЛГОРОД 2017

# СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ
1 Спектрально-угловая плотность когерентного излучения7
1.1 Геометрия процесса когерентного рентгеновского излучения7
1.2 Спектрально-угловые плотности ПРИ и ДПИ9
1.3 Угловые плотности ПРИ и ДПИ 12
2 Многократное рассеяние пучка релятивистских электронов на атомах
мишени14
2.1 Условие генерации дифрагированного тормозного излучения 14
2.2 Спектрально-угловые плотности ПРИ и ДПИ с учетом многократного
рассеяния15
2.3 Численные расчеты 17
2.4 Комплекс программ для расчета спектрально-угловых и угловых
плотностей ПРИ и ДПИ 24
ЗАКЛЮЧЕНИЕ
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

#### **ВВЕДЕНИЕ**

Тема исследования: влияние многократного рассеивания релятивиских электронов в монокристалле на спектрально-угловые характеристики когерентно-ренгеновского излучения.

Актуальность: настоящая работа посвящена развитию динамической теории когерентного рентгеновского излучения релятивистского электрона пересекающего монокристаллическую пластинку произвольной толщины в геометрии рассеяния Лауэ с учетом многократного рассеяния пучка релятивистских электронах на атомах мишени.

Для учета многократного рассеяния используется традиционный метод усреднения спектрально-угловой и угловой плотностей излучений по расширяющемуся пучку прямолинейных траекторий электронов. Необходимо отметить, что строгий кинетический подход, описанный в работе [12], не позволяет рассматривать процесс излучения из мишени конечной толщины, а также отдельно рассматривать вклады механизмов излучения ПРИ и ДПИ.

Однако использование полученного в работе [12] критерия существенности вклада ДТИ в выход излучения, позволяет рассматривать условия, при которых вклад ДТИ отсутствует, то есть традиционный подход к учету влияния многократного рассеяния на параметры излучения вполне оправдан.

Объект исследования-ПРИ и ДТИ.

Предмет исследования- спектрально-угловые характеристики ПРИ и ДТИ.

Цель: Исследование влияния многократного рассеяния релятивистских электронов в монокристаллической пластине на спектрально-угловые характеристики когерентного рентгеновского излучение.

Для достижения поставленной цели были поставлены следующие задачи:

1. Вывод выражения, описывающего спектрально-угловую плотность параметрического рентгеновского излучения (ПРИ) релятивистского электрона пучка.

2. Вывод выражения, описывающего спектрально-угловую плотность дифрагированного переходного излучения (ДПИ) релятивистского электрона пучка.

3. Вывод выражений, описывающих угловые плотности ПРИ и ДПИ с учетом многократного рассеяния электронов пучка на атомах монокристалла.

4. Проведение численных расчетов и анализ спектрально-угловых характеристик когерентного рентгеновского излучение.

Когда быстрая заряженная частица пересекает монокристалл, ее кулоновское поле рассеивается на системе параллельных атомных плоскостей кристалла, порождая параметрическое рентгеновское излучения (ПРИ) [1,3]. При пересечении заряженной частицы поверхности пластинки возникает переходное излучение (ПИ) [4,5], которое впоследствии дифрагирует на системе параллельных атомных плоскостей кристалла, образуя в направлении рассеяния Брэгга дифрагированное переходное излучение ДПИ [6,7].

Многократное рассеяние релятивистского электрона на атомах монокристалла может оказывать влияние на спектрально-угловые ПРИ и характеристики ДПИ, возбуждаемых пучком релятивистских Естественная ширина спектра ПРИ определяется электронов. числом неоднородностей, с которыми взаимодействует электрон. В эксперименте по исследованию ширины спектра ПРИ в кристалле, представленном в работе [8] ширина спектральных линий оказалась значительно больше, чем ширина спектра ПРИ электрона, движущегося прямолинейно. В работе [9] на основе кинематической теории было показано, что многократное рассеяния оказывает существенное влияние на ширину спектра ПРИ "назад" в кристалле, при этом усреднение спектрально-угловой плотности излучения проведено на основе метода функционального интегрирования. Существование вкладов (ДТИ) и дифрагированного излучения дифрагированного тормозного

переходного излучения в работе [9] не рассматривалось. Традиционно влияние многократного рассеяния на свойства параметрического излучения учитывается усреднением сечения параметрического излучения по расширяющемуся пучку прямолинейных траекторий излучающих электронов. Между тем, в ряде экспериментальных работ [10,11] указывалось на несоответствие теории параметрического излучения, использующей усреднение пучку ПО прямолинейных траекторий излучающих частиц, полученным экспериментальным данным. Очевидно, в рамках такого подхода теряется вклад дифрагированного тормозного излучения. В рамках динамической теории дифракции в работе [12] была развита теория ПРИ в безграничном кристалле не учитывающая ДПИ, но корректно учитывающая влияния многократного рассеяния излучающего электрона на характеристики ПРИ. В цитируемой работе на основе строгого кинетического подхода к усреднению сечения излучения по всем возможным траекториям излучающих частиц показано, что вклад ДТИ может быть весьма существенным. В [12] получены выражения, описывающие спектрально-угловые характеристики полного выхода излучения, без разделения когерентного излучения на механизмы ПРИ и ДТИ, что позволило оценить только относительный вклад этих механизмов излучения. В работе найдено условие существенности вклада ДТИ в полный выход излучения.

Процесс когерентного рентгеновского излучения релятивистских рамках динамической теории электронов В кристалле В дифракции рентгеновских волн развит в работах [13,19]. Необходимо отметить, что в работах [13,15] рассматривалось когерентное рентгеновское излучение в частном случае симметричного отражения, когда отражающая система атомных плоскостей кристалла расположена параллельно поверхности мишени в случае геометрии рассеяния Брэгга и перпендикулярно в случае геометрии рассеяния работах [16,19] развита динамическая Лауэ. B теория когерентного рентгеновского излучения релятивистских электронов в монокристалле в общем случае асимметричного отражения поля электрона относительно

поверхности мишени, когда система параллельных отражающих слоев мишени может располагаться под произвольным углом к поверхности мишени. В рамках двух волнового приближения динамической теории дифракции получены и исследованы выражения описывающие ПРИ и ДПИ в общем случае асимметричного отражения.

Выпускная квалификационная работа (ВКР) состоит из введения, двух глав, заключения и использованных источников литературы.

#### 1 Спектрально-угловая плотность когерентного излучения

#### 1.1 Геометрия процесса когерентного рентгеновского излучения

Рассмотрим пучок релятивистских электронов пересекающих кристаллическую пластинку ( см. рисунок. 1). Введем угловые переменные  $\psi$ ,  $\theta$  и  $\theta_0$  в соответствии с определениями скорости релятивистского электрона V и единичных векторов: в направлении импульса фотона **n** излученного вблизи скорости электрона и в направлении рассеяния Брэгга **n**<sub>g</sub>:

$$\mathbf{V} = \left(1 - \frac{1}{2}\gamma^{-2} - \frac{1}{2}\psi^{2}\right)\mathbf{e}_{1} + \mathbf{\psi}, \qquad \mathbf{e}_{1}\mathbf{\psi} = 0$$
  
$$\mathbf{n} = \left(1 - \frac{1}{2}\theta_{0}^{2}\right)\mathbf{e}_{1} + \mathbf{\theta}_{0}, \qquad \mathbf{e}_{1}\mathbf{\theta}_{0} = 0, \qquad \mathbf{e}_{1}\mathbf{e}_{2} = \cos 2\theta_{B},$$
  
$$\mathbf{n}_{g} = \left(1 - \frac{1}{2}\theta^{2}\right)\mathbf{e}_{2} + \mathbf{\theta}, \ \mathbf{e}_{2}\mathbf{\theta} = 0, \qquad (1)$$

где **θ** - угол излучения, отсчитываемый от оси детектора излучения **e**<sub>2</sub>, **ψ** - угол отклонения электрона в пучке, отсчитываемый от оси электронного пучка **e**<sub>1</sub>, **θ**<sub>0</sub> - угол между направлением распространения падающего фотона и осью **e**<sub>1</sub>,  $\gamma = 1/\sqrt{1-V^2}$  - Лоренц-фактор частицы. Угловые переменные раскладываются на составляющие параллельные и перпендикулярные плоскости рисунка: **θ** = **θ**<sub>||</sub> + **θ**<sub>⊥</sub>, **θ**<sub>0</sub> = **θ**<sub>0||</sub> + **θ**<sub>0⊥</sub>, **ψ** = **ψ**<sub>||</sub> + **ψ**<sub>⊥</sub>, **ψ**<sub>0</sub> - начальная расходимость электронного пучка.



Рисунок 1- Геометрия процесса излучения

Для направления распространения излученного фотона (см. рисунок 1), получим выражения для спектрально-угловых плотностей ПРИ и ДПИ с учетом отклонения направления скорости электрона V относительно оси электронного пучка е<sub>1</sub>.

### 1.2 Спектрально-угловые плотности ПРИ и ДПИ

При решении задачи будем рассматривать уравнение для Фурье-образа  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \int dt \, d^3 r \, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r})$  электромагнитного поля, возбуждаемого электроном в кристалле, следующее из системы уравнений Максвелла

$$(k^{2} - \omega^{2}(1 + \chi_{0}))\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)) - \omega^{2}\sum_{\mathbf{g}} \chi_{-\mathbf{g}}\mathbf{E}(\mathbf{k} + \mathbf{g}, \omega) = 4\pi i\omega \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega), \quad (2)$$

где  $\mathbf{J}(\mathbf{k},\omega) = 2\pi e \mathbf{V} \delta(\omega - \mathbf{k} \mathbf{V})$  - Фурье-образ плотности тока излучающего электрона,  $\chi_0(\omega)$  - средняя диэлектрическая восприимчивость,  $\chi_g$  и  $\chi_{-g}$  коэффициенты Фурье разложения диэлектрической восприимчивости кристалла по векторам обратной решетки **g** 

$$\chi(\omega, \mathbf{r}) = 1 + \chi_0(\omega) + \sum_{\mathbf{g}} \chi_{\mathbf{g}}(\omega) \exp(i\mathbf{g}\mathbf{r}), \qquad (3)$$

где  $\chi_0 = \chi'_0 + i\chi''_0, \ \chi_g = \chi'_g + i\chi''_g.$ 

Так как излучаемое релятивистским электроном электромагнитное поле является поперечным в рентгеновском диапазоне частот, то падающая  $E(\mathbf{k}, \omega)$  и дифрагированная  $E(\mathbf{k} + \mathbf{g}, \omega)$  в кристалле электромагнитные волны, определяются двумя амплитудами с разными значениями поперечной поляризации

$$\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega) = E_0^{(1)}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{e}_0^{(1)} + E_0^{(2)}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{e}_0^{(2)},$$
  
$$\mathbf{E}(\mathbf{k}+\mathbf{g},\omega) = E_{\mathbf{g}}^{(1)}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{e}_1^{(1)} + E_{\mathbf{g}}^{(2)}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{e}_1^{(2)},$$
  
(4)

где вектора  $\mathbf{e}_{0}^{(1)}$ и  $\mathbf{e}_{0}^{(2)}$  перпендикулярны вектору **k**, а векторы  $\mathbf{e}_{1}^{(1)}$ и  $\mathbf{e}_{1}^{(2)}$  перпендикулярны вектору  $\mathbf{k}_{g} = \mathbf{k} + \mathbf{g}$ . Векторы  $\mathbf{e}_{0}^{(2)}$ ,  $\mathbf{e}_{1}^{(2)}$  лежат в плоскости векторов **k** и  $\mathbf{k}_{g}$  ( $\pi$ -поляризация), а вектора  $\mathbf{e}_{0}^{(1)}$  и  $\mathbf{e}_{1}^{(1)}$  перпендикулярны ей ( $\sigma$ -поляризация); **g** – вектор обратной решетки, определяющий систему отражающих атомных плоскостей кристалла. В рамках двух волнового приближения динамической теории дифракции уравнение (2) сводится к хорошо известной системе уравнений [20]:

$$\begin{cases} (\omega^{2}(1+\chi_{0})-k^{2})E_{0}^{(s)}+\omega^{2}\chi_{-g}C^{(s)}E_{g}^{(s)}=8\pi^{2}ie\omega\mathbf{e}_{0}^{(s)}\mathbf{V}\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{V}),\\ \omega^{2}\chi_{g}C^{(s)}E_{0}^{(s)}+(\omega^{2}(1+\chi_{0})-k_{g}^{2})E_{g}^{(s)}=0. \end{cases}$$
(5)

Будем рассматривать кристалл с центральной симметрией ( $\chi_g = \chi_{-g}$ ).  $\chi'_g$  и  $\chi''_g$  определяются следующим образом:

$$\chi'_{g} = \chi'_{0} \left( F(g) / Z \right) \left( S(g) / N_{0} \right) \exp \left( - g^{2} u_{\tau}^{2} / 2 \right),$$
(6a)

$$\chi_{g}'' = \chi_{0}'' \exp\left(-\frac{1}{2}g^{2}u_{\tau}^{2}\right),$$
(6b)

где F(g) – форм фактор атома, содержащего Z электронов, S(g) – структурный фактор элементарной ячейки, содержащей  $N_0$  атомов,  $u_{\tau}$  - среднеквадратичная амплитуда тепловых колебаний атомов кристалла. В работе рассматривается рентгеновская область частот: ( $\chi'_g < 0, \chi'_0 < 0$ ).

Величины  $C^{(s)}$  и  $P^{(s)}$  в системе (5) определены следующим образом:

$$C^{(s)} = \mathbf{e}_{0}^{(s)} \mathbf{e}_{1}^{(s)}, \ C^{(1)} = 1, \ C^{(2)} = \cos 2\theta_{B}, \ P^{(1)} = \sin \varphi, \ P^{(2)} = \cos \varphi,$$
$$\mathbf{e}_{0}^{(1)} \mathbf{V} = (\theta - \psi) P^{(1)} = \theta_{\perp} - \psi_{\perp}, \ \mathbf{e}_{0}^{(2)} \mathbf{V} = (\theta + \psi) P^{(2)} = \theta_{\parallel} + \psi_{\parallel},$$
(7)

где  $\theta_{B}$  - угол между осью пучка электрона и системой кристаллографических плоскостей (угол Брэгга);  $\varphi$  – азимутальный угол излучения, отсчитываемый от плоскости, образованной векторами V и g. Величина вектора обратной решетки определяется выражением  $g = 2\omega_{B} \sin \theta_{B}/V$ , где  $\omega_{B}$  - частота Брэгга. Система уравнений (5) при s = 1 описывает поля  $\sigma$  - поляризованные, а при s = 2 поля  $\pi$  - поляризованные.

Выполнив для направления распространения излученного фотона  $\mathbf{k}_{g} = k_{g} \mathbf{n}_{g}$  (см. рисунок 1) аналитические процедуры, аналогичные представленным в работах [18,19], получим выражения для спектральноугловых плотностей ПРИ и ДПИ с учетом отклонения направления скорости электрона V относительно оси электронного пучка  $\mathbf{e}_{1}$ :

$$\omega \frac{d^2 N_{\Pi PH}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{\Omega^{(s)^2}}{(\Delta - \chi_0')^2} R_{\Pi PH}^{(s)}, \qquad (8a)$$

$$R_{\Pi P H}^{(s)} = \left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^{2} + \varepsilon}}\right)^{2} \frac{1 + \exp\left(-2b^{(s)}\rho^{(s)}\Delta^{(1)}\right) - 2\exp\left(-b^{(s)}\rho^{(s)}\Delta^{(1)}\right)\cos\left(b^{(s)}\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi - \sqrt{\xi^{2} + \varepsilon}}{\varepsilon}\right)\right)}{\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi - \sqrt{\xi^{2} + \varepsilon}}{\varepsilon}\right)^{2} + \rho^{(s)^{2}}\Delta^{(1)^{2}}}$$

$$\omega \frac{d^{2}N_{\Pi H}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^{2}}{4\pi^{2}}\Omega^{(s)^{2}}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta - \chi_{0}'}\right)^{2}R_{\Pi H}^{(s)}, \qquad (9a)$$

$$R_{\Pi H}^{(s)} = \frac{\varepsilon^{2}}{\xi(\omega)^{2} + \varepsilon}\left[\exp\left(-2b^{(s)}\rho^{(s)}\Delta^{(1)}\right) + \exp\left(-2b^{(s)}\rho^{(s)}\Delta^{(2)}\right) - 2\exp\left(-b^{(s)}\rho^{(s)}\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}\right) \cdot \cos\left(\frac{2b^{(s)}\sqrt{\xi^{(s)^{2}} + \varepsilon}}{\varepsilon}\right)\right], \qquad (9b)$$

где

$$\begin{split} \Delta(\theta_{\perp},\theta_{\parallel},\psi_{\perp},\psi_{\parallel},\gamma) &= \gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^{2} + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^{2}, \qquad \Omega^{(1)} = \theta_{\perp} - \psi_{\perp}, \\ \Omega^{(2)} &= \theta_{\parallel} + \psi_{\parallel}, \\ \Delta^{(2)} &= \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon} + \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon} \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)^{2}} + \varepsilon}} + \frac{\kappa^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)^{2}} + \varepsilon}}, \quad \Delta^{(1)} &= \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon} - \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon} \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)^{2}} + \varepsilon}} - \frac{\kappa^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)^{2}} + \varepsilon}}, \\ \sigma^{(s)} &= \frac{1}{|\chi'_{g}|C^{(s)}} \left(\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^{2} + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^{2} - \chi'_{0}\right), \\ \varepsilon &= \frac{\sin(\delta + \theta_{B})}{\sin(\delta - \theta_{B})}, \\ \rho^{(s)} &= \frac{1}{2\sin(\delta - \theta_{B})} \frac{L}{L_{ext}^{(s)}}, \\ \nu^{(s)} &= \frac{\chi'_{gC}^{(s)}}{\chi'_{0}}, \\ \kappa^{(s)} &= \frac{\chi''_{gC}^{(s)}}{\chi'_{0}}, \\ \varepsilon^{(s)} &= \frac{2\sin^{2}\theta_{B}}{V^{2}|\chi'_{g}|C^{(s)}} \left(1 - \frac{\omega(1 - \theta_{\parallel} \cot \theta_{B})}{\omega_{B}}\right). \end{split}$$
(10)

Выражения (8) и (9) описывают спектрально-угловую плотность ПРИ и ДПИ релятивистского электрона, пересекающего кристаллическую пластинку под углом ψ относительно оси электронного пучка е<sub>1</sub>. Эти выражения получены в рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции с учетом угла между отражающей системой параллельных атомных плоскостей кристалла и поверхности мишени (угол *δ*).

Важным параметром в выражениях (8-10) является параметр  $\varepsilon$ , определяющий степень асимметрии отражения поля в кристаллической

пластинке относительно поверхности мишени,  $\delta$  – угол между поверхностью мишени и отражающими плоскостями. Параметр  $\rho^{(s)}$ , характеризующий степень поглощения рентгеновских волн в кристалле, равен отношению длины экстинкции  $L_{ext}^{(s)} = 1/\omega |\chi'_g| C^{(s)}$  к длине поглощения  $L_{abs} = 1/\omega \chi''_0$  рентгеновских волн:  $\rho^{(s)} = L_{ext}^{(s)}/L_{abs}$ . Параметр  $b^{(s)}$ , характеризующий толщину кристаллической пластинки, равен отношению половины пути электрона в мишени  $L_e = L/\sin(\delta - \theta_B)$  к длине экстинкции  $L_{ext}^{(s)}$ . Параметр  $v^{(s)}$ , принимающий значения в промежутке  $0 \le v^{(s)} \le 1$ , определяет степень отражения волн от кристалла, которая обуславливается характером интерференции волн, отраженных от разных плоскостей (конструктивным ( $v^{(s)} \approx 1$ ) или деструктивным ( $v^{(s)} \approx 0$ )).

Параметр к<sup>(s)</sup> определяет степень проявления эффекта аномального слабого фотопоглощения (эффекта Бормана) в прохождении рентгеновских фотонов излучений ПРИ и ДПИ через кристаллическую мишень [21, 22].

## 1.3 Угловые плотности ПРИ и ДПИ

Чтобы найти угловую плотность ПРИ, проинтегрируем выражение (8) по частотной функции  $\xi^{(s)}(\omega)$ , используя соотношение  $\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{|\chi'_g|C^{(s)}}{2\sin^2\theta_B}d\xi^{(s)}$ , следующее из выражения (10). Так как  $\rho^{(s)}\Delta^{(1)} \ll 1$ , такое интегрирование может быть выполнено с использованием аппроксимации

$$\frac{1}{x^2 + a^2} \left( 1 + e^{-2ba} - 2a^{-ba} \cos(bx) \right) \to \frac{\pi}{a} \left( 1 - e^{-2ba} \right) \delta(x) \,. \tag{11}$$

Результат интегрирования представим в виде

$$\frac{dN_{\Pi P H}^{(s)}}{d\Omega} = \frac{e^2 v^{(s)^2} \varepsilon^2 \Omega^{(s)^2}}{4\pi \sin^2 \theta_B \chi_0''} \frac{\left(1 - \exp\left\{-2b^{(s)} \rho^{(s)} \frac{(\Sigma+1)^2 - 2\kappa^{(s)} v^{(s)} (\Sigma+1) + v^{(s)^2}}{v^{(s)^2} + (\Sigma+1)^2 \varepsilon}\right\}\right)}{(\Sigma+1)^2 - 2\kappa^{(s)} v^{(s)} (\Sigma+1) + v^{(s)^2}}, \quad (12)$$

где  $\Sigma = \Delta / |\chi'_0|$ .

Проинтегрировав (9) по частотной функции ξ<sup>(s)</sup>(ω), найдем угловую плотность ДПИ:

$$\frac{dN_{\mu\Pi\mu}^{(s)}}{d\Omega} = \frac{e^2 v^{(s)}}{8\pi^2 \sin^2 \theta_B |\chi_0'|} \Omega^{(s)^2} \left(\frac{1}{\Sigma} - \frac{1}{\Sigma+1}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{\mu\Pi\mu}^{(s)} d\xi^{(s)}(\omega).$$
(13)

Выражения (8) и (9), описывающие соответственно спектрально-угловые плотности ПРИ и ДПИ, а также выражения (12) и (13), описывающие угловые плотности ПРИ и ДПИ, получены впервые в рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции с учетом отклонения (угол  $\psi$ ) направления скорости электрона V относительно оси электронного пучка  $e_1$  (см. рисунок 1). Полученные выражения учитывают асимметрию отражения поля электрона относительно поверхности мишени, характеризуемую углом между поверхностью мишени и системой дифрагирующих атомных плоскостей кристалла (угол  $\delta$ ).

2 Многократное рассеяние пучка релятивистских электронов на атомах мишени

#### 2.1 Условие генерации дифрагированного тормозного излучения

Так как многократное рассеяние электронов на атомах среды может привести К генерации тормозного излучения, которое далее может дифрагировать на системе параллельных атомных плоскостей кристалла в направлении рассеяния Брэгга к, то далее рассмотрим возможность и условие вклада дифрагированного тормозного излучения (ДТИ) в полный выход излучения. Необходимо отметить, что исследование относительного вклада ДТИ в полный выход излучения проведено в работе [12]. Поясним возможность вклада дифрагированного тормозного излучения в полный выход излучения при многократном рассеяние релятивистских электронов в кристалле. Рассмотрим величину  $\gamma_{LP}^{-2} = \psi_s^2 l_c$ , равную среднему квадрату угла многократного рассеяния электрона на длине формирования тормозного излучения  $l_c = 2\gamma^2 / \omega$ ,

где  $\psi_s^2 = \frac{E_s^2}{m^2 \gamma^2} \frac{1}{L_R}$  - средний квадрат угла многократного рассеяния электрона на

единице длины,  $E_s \approx \frac{4\pi m^2}{e^2} \approx 21 M_{9}B$ ,  $L_R$  - радиационная длина. В области энергии электронов  $\gamma > \gamma_{LP} = \sqrt{e^2 \omega_B L_R / 8\pi}$  проявляется известный эффект Ландау - Померанчука в тормозном излучении [23]. То есть, если выполняется условие  $\gamma > \gamma_{LP}$ , то угол многократного рассеяние электрона на длине формирования излучения существенно превышает величину характерного угла излучения релятивистской частицы  $\gamma^{-1}$ , поэтому тормозной квант разделяется с кулоновским полем электрона на расстоянии, малом по сравнению с длиной формирования  $l_e$ , на которой электрон может излучить несколько тормозных фотонов, которые далее могут дифрагировать на атомных плоскостях монокристаллической мишени, внося вклад в ДТИ. С другой стороны, в области энергии электрона  $\gamma > \gamma_{TM} = \omega_B / \omega_0$  ( $\omega_0$ - плазменная частота) проявляется подавление тормозного излучения (на частоте  $\omega \approx \omega_B$ ) вследствие эффекта Tep – Микаэляна [24]. В случае же  $\gamma_{LP} < \gamma < \gamma_{TM}$  подавления тормозного излучения не происходит и ДТИ может дать существенный вклад в полный выход излучения. Таким образом, при выполнении одного из условия  $\gamma > \gamma_{TM}$  или  $\gamma < \gamma_{LP}$  вклад ДТИ в полный выход излучения можно не учитывать и применять традиционный метод усреднения спектрально-угловых характеристик излучений по расширяющемуся пучку прямолинейных траекторий излучающих электронов.

# 2.2 Спектрально-угловые плотности ПРИ и ДПИ с учетом многократного рассеяния

Проведем усреднение спектрально-угловых плотностей ПРИ и ДПИ по функции углового распределения электронов в пучке, меняющейся за счет многократного рассеяния электрона с длиной прохождения в мишени *t*,

$$f(\psi, t) = \frac{1}{\pi(\psi_0^2 + \psi_s^2 t)} \cdot e^{-\frac{\psi^2}{\psi_0^2 + \psi_s^2 t}},$$
(14)

2

где  $\psi_0$  - начальная расходимость электронного пучка. Выражения, описывающие спектрально-угловые плотности ПРИ и ДПИ, усредненные по расширяющемуся пучку прямолинейных траекторий излучающих электронов на длине пути электрона в мишени  $L_e$ , имеют следующий вид:

$$\left\langle \omega \frac{d^2 N_{\Pi P \mathcal{U}, \mathcal{U} \Pi \mathcal{U}}^{(s)}}{d\omega d\Omega} \right\rangle = \frac{1}{\pi L_e} \int_0^{L_e} dt \int \int d\psi_\perp d\psi_{\parallel} \frac{e^{-\frac{\psi^2}{\psi_0^2 + \psi_s^2 t}}}{\psi_0^2 + \psi_s^2 t} \omega \frac{d^2 N_{\Pi P \mathcal{U}, \mathcal{U} \Pi \mathcal{U}}^{(s)}}{d\omega d\Omega} \,. \tag{15}$$

Используя (8), (9) и (14) получим выражения, описывающие спектрально-угловые плотности ПРИ и ДПИ с учетом многократного рассеяния электрона на атомах периодической слоистой среды

$$\left\langle \omega \frac{d^{2} N_{\Pi P H}^{(s)}}{d \omega d \Omega} \right\rangle = \frac{e^{2}}{4 \pi^{3} \psi_{s}^{2} L_{e}} \int \int d\psi_{\perp} d\psi_{//} \left( \frac{\Omega^{(s)^{2}}}{(\Delta - \chi_{0}')^{2}} R_{\Pi P H}^{(s)}(\psi_{\perp}, \psi_{//}) \int_{\frac{\psi_{\perp}^{2} + \psi_{//}^{2}}{\psi_{0}^{2} + \psi_{s}^{2} L_{e}}}^{\frac{\psi_{\perp}^{2} + \psi_{//}^{2}}{\psi_{0}^{2} + \psi_{s}^{2} L_{e}}} \int \int d\psi_{\perp} d\psi_{//} \left( \Omega^{(s)^{2}} \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta - \chi_{0}'} \right)^{2} R_{/\Pi H}^{(s)}(\psi_{\perp}, \psi_{//}) \int_{\frac{\psi_{\perp}^{2} + \psi_{//}^{2}}{\psi_{0}^{2} + \psi_{s}^{2} L_{e}}} \frac{e^{-x}}{x} dx \right) \right).$$
(16)

Используя (12), (13) и (15) получим выражения, описывающие угловые плотности ПРИ и ДПИ с учетом многократного рассеяния

$$\left\langle \frac{dN_{\Pi PH}^{(s)}}{d\Omega} \right\rangle = \frac{e^2 v^{(s)^2} \varepsilon^2}{4\pi^2 \sin^2 \theta_B \chi_0^{"} \psi_s^2 L_e} \iint d\psi_{\perp} d\psi_{\parallel} \Omega^{(s)^2} \times \left( \frac{\left( 1 - \exp\left\{ -2b^{(s)} \rho^{(s)} \frac{(\Sigma+1)^2 - 2\kappa^{(s)} v^{(s)} (\Sigma+1) + v^{(s)^2}}{v^{(s)^2} + (\Sigma+1)^2 \varepsilon} \right\} \right)}{(\Sigma+1)^2 - 2\kappa^{(s)} v^{(s)} (\Sigma+1) + v^{(s)^2}} \underbrace{\int_{\frac{\psi_{\perp}^2 + \psi_{\parallel}^2}{\psi_0^2 + \psi_s^2 L_e}}^{\frac{\psi_{\perp}^2 + \psi_{\parallel}^2}{\psi_0^2 + \psi_s^2 L_e}} \frac{e^{-x}}{x} dx}{\psi_{\parallel}^2} \right)$$

(18)

$$\left\langle \frac{dN_{\mu\Pi\mu}^{(s)}}{d\Omega} \right\rangle = \frac{e^2 v^{(s)}}{8\pi^3 \sin^2 \theta_B |\chi_0'| \psi_s^2 L_e} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\mu\Pi\mu}^{(s)} d\xi^{(s)} \int \int d\psi_{\perp} d\psi_{//} \left( \Omega^{(s)^2} \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta - \chi_0'} \right)^2 \int_{\frac{\psi_{\perp}^2 + \psi_{//}^2}{\psi_0^2 + \psi_s^2 L_e}}^{\frac{\psi_{\perp}^2 + \psi_{//}^2}{\psi_0^2}} \frac{e^{-x}}{x} dx \right).$$
(19)

Выражения (16) - (19), полученные в геометрии рассеяния Лауэ в рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции для общего

случая асимметричного отражения поля электрона относительно поверхности мишени, является главным результатом настоящей работы. Полученные выражения справедливы для любой толщины кристаллической мишени, они позволяют сравнительно быстро выполнить расчеты спектрально-угловых и угловых характеристик ПРИ и ДПИ релятивистских электронов. Выражения получены в рамках динамической теории дифракции и поэтому позволяют исследовать проявления эффектов динамической дифракции в ПРИ и ДПИ.

Необходимо отметить, что хотя выше и говорится что в случае  $\gamma_{LP} < \gamma < \gamma_{TM}$  дифрагированное тормозное излучение может дать ощутимый вклад в выход излучения, однако полученные выражения правильно описывают спектрально-угловых характеристики ПРИ и ДПИ и в этом случае. В этом случае необходимо отдельно рассмотреть вклад ДТИ, используя хорошо известные формулы.

#### 2.3 Численные расчеты

Приведем пример использования полученных выражений для численных расчетов спектрально-угловых характеристик ПРИ. Будем рассматривать  $\sigma$ поляризованные (*s* = 1) волны излучения, при угле  $\theta_{11} = 0$ . Рассмотрим излучение релятивистского электрона с Лоренц-фактором у = 500 (энергией  $E_{e} \approx 250 M_{2}B$ ) и начальной расходимостью электронного пучка  $\psi_{0} = 0.1 \, Mpad$ , пересекающего монокристаллическую пластинку вольфрама, В качестве плоскостей системы параллельных атомных кристалла, на которой формируется ПРИ и дифрагирует переходное излучение ДПИ, выберем систему (110). Угол между поверхностью мишени и системой диафрагирующих атомных плоскостей кристалла  $\delta = 36,7^{\circ}$  ( $\epsilon = 3$ ), угол Брэгга  $\theta_{B} = 20,6^{\circ}$ , частота Брэгга  $\omega_B = 8000 \Rightarrow B$ . Радиационная длина для вольфрама  $L_R = 0.33$ ,  $\gamma_{LP} = 195$ ,

 $\gamma_{TM} = 98$ . Значение Лоренц-фактора  $\gamma$  лежит в диапазоне  $\gamma_{TM} < \gamma_{LP} < \gamma$ , то есть ДТИ подавляется и его вклад в полное излучения отсутствует.



Рисунок 2- Спектрально-угловая плотность ПРИ для различных толщин монокристаллической пластинки и фиксированного угла наблюдения

На рисунке. 2 приведены построенные по формуле (16) кривые, описывающие спектры ПРИ релятивистского электрона при различных толщинах мишени для фиксированного угла наблюдения. Кривые построены для различных величин толщины мишени, и, как следствие из этого, различных Ha путей рисунке 2 толщинам электрона мишени. мишени В L = 3 мкм, 5 мкм, 10 мкмсоответствуют ПУТИ электрона В мишени  $L_e = 10.8 \text{ мкм}, 18 \text{ мкм}, 36 \text{ мкм}$ . Для сравнения на рисунке 3 приведены кривые, построенные по формуле (8) и описывающие спектр ПРИ для случая, если бы многократное рассеяние отсутствовало, а направление движения релятивистского электрона совпадало бы с осью электронного пучка  $e_1$ . Из сравнения второго и третьего рисунка следует рост ширины спектра ПРИ и падения его амплитуды из-за многократного рассеяния. Сравнивая угловые плотности ПРИ рассчитанные по формулам (18) и (12) с учетом и без учета многократного рассеяния, представленные на рисунке 4 и рисунке 5, можно сделать вывод о том, что угловая плотность ПРИ так же существенно зависит от многократного рассеивания.



Рисунок 3- Спектрально-угловая плотность ПРИ для случая отсутствия многократного рассеяния



Рисунок 4- Угловая плотность ПРИ для различных толщин монокристаллической пластинки



Рисунок 5- Угловая плотность ПРИ в случае, если бы многократное рассеяние отсутствовало

Для примера рассмотрим также спектрально-угловую плотность ДПИ. На рисунке 6 представлены кривые, построенные по формуле (17), описывающие спектрально-угловую плотность ДПИ релятивистского электрона при фиксированного различных толщинах мишени для угла наблюдения. Параметры пучка и мишени аналогичны предыдущим расчетам для ПРИ. Кривые построены для угла наблюдения  $\theta_{\perp} = 2 \text{мрад}$ , соответствующего максимуму угловой плотности ДПИ при рассматриваемых параметрах.

Для сравнения на рисунке 7 приведены кривые, построенные по формуле (9), описывающие спектр ДПИ для случая отсутствия многократного рассеяния и направления движения релятивистского электрона совпадающего с осью электронного пучка **e**<sub>1</sub>. Из сравнения рисунок 6 и рисунок 7 следует, что

амплитуда спектрально-угловой плотности ДПИ существенно уменьшается изза многократного рассеяния, однако ширина спектра не меняется.



Рисунок 6- Спектрально-угловая плотность ДПИ для различных толщин монокристаллической пластинки и фиксированного угла наблюдения





многократного рассеивания



Рисунок 8- Спектрально-угловая плотность ДПИ для случая отсутствия многократного рассеяния. (для другой толщины мишени)

На рисунке 8 представлены кривые описывающие спектрально-угловую плотность ДПИ при тех же параметрах, что и кривые рисунке 7, но при толщинах мишени L = 0.3 M K M, 0.4 M K M, 0.6 M K M. Видно, что насыщение амплитуды спектра ДПИ без учета многократного рассеяния релятивистских электронов также имеется, но происходит при толщине мишени L = 0.4 M K M, значительно меньшей, чем в случае учета многократного рассеяния (см. рисунок 6).

Таким образом, многократное рассеяния электронов на атомах мишени приводит к падению амплитуды спектрально-угловой плотности ДПИ без изменения его ширины спектра и при этом увеличивается толщина мишени, на которой амплитуда спектрально-угловой плотности ДПИ будет максимальной.

# 2.4 Комплекс программ для расчета спектрально-угловых и угловых плотностей ПРИ и ДПИ

На основе пакета компьютерной математики Mathcad разработан комплекс программ для расчета спектрально-угловых и угловых характеристик параметрического рентгеновского излучения и дифрагированного переходного излучения многократно рассеивающихся на атомах монокристалла релятивистских электронов.

Mathcad – это приложение для математических и инженерных вычислений, промышленный стандарт проведения, распространения и хранения расчетов. Mathcad – продукт компании РТС – мирового лидера разработки систем САПР, РDM и PLM. Mathcad является универсальной системой, т.е. может использоваться в любой области науки и техники – везде, где применяются математические методы.

Документы Mathcad представляют расчеты в виде, очень близком к стандартному математическому языку, что упрощает постановку и решение задач. Mathcad содержит текстовый и формульный редактор, вычислитель,

средства научной и деловой графики, а также огромную базу справочной информации, как математической, так и инженерной. Редактор формул обеспечивает естественный «многоэтажный» набор формул в привычной математической нотации (деление, умножение, квадратный корень, интеграл, сумма и т.д.). Мощные средства построения графиков и диаграмм сочетают простоту использования и эффектные способы визуализации данных и подготовки отчетов.

MMathcad - (www.pacvetw2)	_ 6 ×
10 Ele Edit View Juert Format Iools Symbolics Window Help	Greek 🗾 Calculator 🖬 💶 🖉 🗙
	αβγδεξ sin cos tan In log
	ηθικλμ ΠΙΗΓΓ
	νξο × ρ σ = π 7 8 9 /
we ve we ve	τυφ 9 X W 4 5 6 ×
	ω         A         B         Γ         A         S         B         ×         A         S         S         ×         A           Z         H         I         S         F         N         B         -         A         S         S         ×         A         A         S         S         A         A         S         S         A         A         S         S         A         A         S         S         A         A         S         S         A         A         S         S         A         A         S         S         A         A         S         S         A         A         S         S         A         A         S         S         A         A         S         S         A         A         S         S         A         A         S         S         A         A         A         A         A         S         S         A         A         A         S         A         A         A         A         A         A         A         A         A         A         A         A         A         A         A         A         A         A
	,
Press F1 for help.	AUTO Page 1
	- 🏴 🐹 😭 🌗 рус 9:03 01.06.2017

Рисунок 9- Данные для вычислений





Рисунок 10- Спектрально-угловая плотность ПРИ для различных толщин монокристаллической пластинки и фиксированного угла наблюдения

$$R2pxt(\omega,\theta 1,\theta 2,\psi 1,\psi 2,L) := \frac{\alpha}{4\cdot\pi^2} \cdot \left[ \frac{(\theta 1-\psi 1)^2}{\left[ (\theta 1-\psi 1)^2 + (\theta 2+\psi 2)^2 + \gamma^{-2} - \chi o 1 \right]^2} \cdot Rpxt(\omega,\theta 1,\theta 2,\psi 1,\psi 2,L) \right]$$

На рисунке. 10 приведены построенные по формуле (16) кривые, описывающие спектры ПРИ релятивистского электрона при различных толщинах мишени для фиксированного угла наблюдения. Кривые построены для различных величин толщины мишени, и, как следствие из этого, различных 2 Ha путей электрона мишени. рисунке толщинам мишени В L = 3 мкм, 5 мкм, 10 мкм соответствуют ПУТИ электрона В мишени L<sub>e</sub> = 10.8 мкм, 18 мкм, 36 мкм. Для сравнения на рисунке 3 приведены кривые, построенные по формуле (8) и описывающие спектр ПРИ для случая, если бы многократное рассеяние отсутствовало, а направление движения релятивистского электрона совпадало бы с осью электронного пучка  $\mathbf{e}_1$ .



#### многократного рассеяния







Из сравнения следует рост ширины спектра ПРИ и падения его амплитуды из-за многократного рассеяния. Сравнивая угловые плотности ПРИ рассчитанные по формулам (18) и (12) с учетом и без учета многократного рассеяния, представленные на рисунке 4 и рисунке 5, можно сделать вывод о том, что угловая плотность ПРИ так же существенно зависит от многократного рассеивания.



Рисунок 13- Угловая плотность ПРИ в случае, если бы многократное

рассеяние отсутствовало



Рисунок 14- Спектрально-угловая плотность ДПИ для различных толщин монокристаллической пластинки и фиксированного угла наблюдения



Рисунок 15- Спектрально-угловая плотность ДПИ для различных толщин монокристаллической пластинки и фиксированного угла наблюдения

Сравнивая угловые плотности ПРИ рассчитанные по формулам (18) и (12) с учетом и без учета многократного рассеяния, представленные на рис унке 13 и рисунке 14, можно сделать вывод о том, что угловая плотность ПРИ так же существенно зависит от многократного рассеивания.



Рисунок 16- Тоже, что на рисунке 15, но для других толщин мишени

$$R2dtr(\omega, \theta 1, \theta 2, \psi 1, \psi 2, L) := \frac{\alpha}{4 \cdot \pi^2} \left[ (\theta 1 - \psi 1)^2 \cdot \left[ \frac{1}{\left[ (\theta 1 - \psi 1)^2 + (\theta 2 + \psi 2)^2 + \gamma^{-2} \right]} - \frac{1}{\left[ (\theta 1 - \psi 1)^2 + (\theta 2 + \psi 2)^2 + \gamma^{-2} - \chi_0 1 \right]} \right]^2 \cdot Rdtr(\omega, \theta 2, L) \right]$$

Для сравнения на рисунке 15 приведены кривые, построенные по формуле (9), описывающие спектр ДПИ для случая отсутствия многократного рассеяния и направления движения релятивистского электрона совпадающего с осью электронного пучка **e**<sub>1</sub>. Из сравнения рисунок 14 и рисунок 15 следует, что амплитуда спектрально-угловой плотности ДПИ существенно уменьшается из-за многократного рассеяния, однако ширина спектра не меняется.

На рисунке 16 представлены кривые описывающие спектрально-угловую плотность ДПИ при тех же параметрах, что и кривые рисунке 15, но при толщинах мишени L = 0.3 мкм, 0.4 мкм, 0.6 мкм. Видно, что насыщение амплитуды спектра ДПИ без учета многократного рассеяния релятивистских электронов

также имеется, но происходит при толщине мишени  $L = 0.4 _{MKM}$ , значительно меньшей, чем в случае учета многократного рассеяния (см. рисунок 14).

Таким образом, многократное рассеяния электронов на атомах мишени приводит к падению амплитуды спектрально-угловой плотности ДПИ без изменения его ширины спектра и при этом увеличивается толщина мишени, на которой амплитуда спектрально-угловой плотности ДПИ будет максимальной.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Развита динамическая теория когерентного рентгеновского излучения релятивистского электрона, пересекающего монокристаллическую пластину произвольной толщины в условиях многократного рассеяния релятивистских электронов на атомах мишени.

2. Получено необходимое условие существенности вклада дифрагированного тормозного излучения в полный выход когерентного рентгеновского излучения релятивистского электрона из периодической слоистой среды. Показаны условия применимости традиционного метода описания полного выхода излучения, генерируемого пучком релятивистских электронов в периодической слоистой среде, основанного на предположении о прямолинейном движении излучающей частицы;

3. С использованием полученных в настоящей главе выражений, ПРИ, описывающих спектрально-угловые характеристики проведены численные расчеты ДЛЯ релятивистских электронов, пересекающих периодическую слоистую среду «углерод – вольфрам» в заданных условиях; показано, что при увеличении начальной расходимости электронного пучка возрастает как ширина, так и амплитуда спектра ПРИ, что ведет к существенному росту угловой плотности ПРИ релятивистского электрона; показано, что амплитуда спектра ПРИ растет при уменьшении соотношения толщины слоя вольфрама к толщине слоя углерода, что обусловлено следующими тремя факторами: увеличением длины поглощения фотонов в мишени, усилением конструктивной интерференции волн от разных слоев мишени в режиме динамической дифракции и усилением эффекта аномального фотопоглощения (эффекта Бормана). Показано, что увеличение амплитуды спектра ПРИ приводит к росту угловой плотности ПРИ.

4. В рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции получены аналитические выражения для спектрально-угловой плотностей и угловых плотностей параметрического рентгеновского излучения

и дифрагированного переходного излучения в условиях многократного рассеяния.

5. В работе оцениваются условия существенности (несущественности) вклада ДТИ в выход излучения, показаны условия применимости традиционного метода для описания полного выхода излучения, генерируемого пучком релятивистских электронов в кристалле.

6. В пакете компьютерной математики Mathcad разработан комплекс программ для вычисления спектрально-угловых и угловых плотностей ПРИ и ДПИ. Проведены численные расчеты.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Тер-Микаэлян М.Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. Ереван: АН АрмССР, 1969. 459 с.

2. Гарибян Г.М., Ян Ши //ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 930.

3. Барышевский В.Г., Феранчук И.Д. // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 944.

4. Гинзбург В.Л., Франк И.М. // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С.15.

5. Гинзбург В.Л., Цытович В.Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. М: Наука, 1984.

6. Caticha A. // Phys. Rev. A. 1989. V.40. P. 4322.

7. Nasonov N. // Phys. Lett. A. 1999. V. 260. P. 391.

8. Backe H., Kube G. and Lanth W. Electron-Photon Interaction in Dense Media, Ed. H. Wiedemann, Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, 2001, P. 153.

9. Шульга Н. Ф., Табризи М. // Письма в ЖЭТФ. Т. 76. вып.5, С. 337.

10. Chefonov O.V., Kalinin B.N., Naumenko G.A., Podalko D.V. et al.//Nucl. Instr.Meth.B. 2001. V.173. P.18

11. Bogomazova E.A., Kalinin B.N., Naumenko G.A., Podalko D.V. et al.//Nucl. Instr.Meth B. 2003. V.201. P.276.

12. Насонов Н.Н., Насонова В.А., Носков А.В. // Поверхность. Рентген., синхротр. и нейтрон. исслед. 2004. №4. С.18.

13. Nasonov N.// Physics Letters A. 2001. V. 292. P. 146.

14. Nasonov N., Noskov A.// Nucl. Instr. Meth. In Phys. Res. B. 2003. V. 201. P. 67.

15. Nasonov N.N., Zhukova P. N, Piestrup M.A., Park H.//Nucl. Instr. Meth. In Phys. Res. B. 2006. V. 251. P. 96.

16. Blazhevich S., Noskov A. // Nucl. Instr. Meth. In Phys. Res. B. 2006. V. 252. P. 69.

Blazhevich S.V, Noskov A.V.//Nucl. Instr. Meth. In Phys. Res. B. 2008.
 V. 266. P. 3770.

18. Блажевич С. В., Носков А.В.// ЖЭТФ. 2009.Т. 136. С. 1043.

19. Блажевич С. В., Носков А.В. // Поверхность. Рентген., синхротр. и нейтрон. исслед. 2010. №4. С. 40.

20. Базылев В.А., Жеваго Н.К., Излучение быстрых частиц в веществе и внешних полях. М: Наука, 1987. 272 с.

21. Насонов Н.Н., Носков А.В., Сергиенко В.И., Сыщенко В.Г.// Известия ВУЗов. Физика. 2001. Т. 44 (6). С. 75.

Blazhevich S.V., Noskov A.V.// Nucl. Instr. Meth. In Phys. Res. B. 2008.
 V. 266. P. 3777.

23. Ландау Л.Д., Померанчук И.Я.//Докл. АН СССР. 1953. Т. 92. С. 735.

24. Тер-Микаелян М.Л. //Докл. А.Н. СССР. 1954. Т. 94. С. 1033.