

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**  
( Н И У « Б е л Г У » )

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

**ОРГАНИЗАЦИЯ ИЗУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ПЛАНИМЕТРИИ НА  
ЭЛЕКТИВНОМ КУРСЕ**

Выпускная квалификационная работа  
обучающегося по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое  
образование, профиль Математика и информатика  
очной формы обучения, группы 02041203  
Нефедова Алексея Андреевича

Научный руководитель  
к.ф.-м.н., доцент  
Борисовский И.П.

БЕЛГОРОД 2017

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>3</b>
<b>ГЛАВА 1. ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ.....</b>	<b>8</b>
1.1 Элективные курсы: понятие, задачи, функции и виды.....	8
1.2 Основные особенности профильного обучения математике .....	12
1.3 Роль элективных курсов в профильном обучении математике ...	21
<b>ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ОРГАНИЗАЦИИ ИЗУЧЕНИЯ ПЛАНИМЕТРИИ НА ЭЛЕКТИВНОМ КУРСЕ ПО ГЕОМЕТРИИ.....</b>	<b>26</b>
2.1 Анализ процесса обучения на элективном курсе .....	26
2.2 Разработка методического сопровождения процесса организации изучения планиметрии на элективном курсе по геометрии .....	32
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>53</b>
<b>ИСТОЧНИКИ И ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>58</b>

## ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день в Российской Федерации не прекращается совершенствование школьного образования. Из множества возможных путей модернизации образовательных процессов, подключение профильного обучения к базовому курсу является одним из самых эффективных. С одной стороны, это позволяет реализовать индивидуальный подход учителя к обучающемуся, а также дает возможность ученику развивать умение делать осознанный выбор, ориентированный на себя, нацелиться на дальнейшее обучение, выбор профессии.

Бесспорно, результативность введения на старшую ступень общеобразовательной школы профильного обучения во многом зависит от уровня подготовленности содержательного и методического аспектов структурных компонентов профильного обучения. Как показывают исследования, на практике наименее разработанными являются элективные курсы.

В обучении старшеклассников математике в современной школе внимание геометрии уделяется гораздо в меньшей степени, чем алгебре и начала математического анализа. Это стало характерно и для элективных курсов, разработки которых касаются в своем большинстве алгебры. Одной из причин образовавшейся ситуации, как считают некоторые исследователи, может являться содержание ЕГЭ по математике, задания которого в меньшей степени ориентированы на геометрию, в большей – на алгебру.

Ознакомление с разделом «Планиметрия» на уроках по геометрии проходит очень поверхностно, что приводит к уменьшению качества усвоения материала, что в свою очередь может вызвать затруднения в некоторых заданиях ЕГЭ. Также это может сыграть не очень хорошую роль для учеников, которым легко дается и интересна математика, и дальнейшее обучение планируется на профессии, связанные с этой наукой.

Исходя из этого, является актуальной проблема разработки элективных курсов, которые способствуют углублению знаний школьников в определенной области знаний человечества.

В настоящее время существуют разработки некоторых элективных курсов по геометрии: «Геометрическое моделирование окружающего мира» [27]; «Четырехмерная геометрия» [39]; «Многогранники» [38] и др. Разработкой элективных курсов занимаются как и учителя-практики общеобразовательных школ, так и преподаватели ВУЗов и авторы школьных учебников по математике: А.Ж. Жафяров [14], Л.С. Сагателова [36], Е.В. Потоскуев [31] и многие другие.

Резюмируя, можно отметить, что элективные курсы по геометрии необходимы на практике. Они разрабатываются, но ориентированность большинства их них, в основном, на расширение знаний учеников. Какой-либо подготовки к ЕГЭ или дальнейшему обучению, связанному с математикой, они в себе не несут.

Проблема: разработка элективного курса по планиметрии «Треугольники и многоугольники» для расширения кругозора по предмету и подготовки их к выпускным и возможным вступительным экзаменам.

Объект исследования: элективные курсы в профильном обучении старшей ступени общеобразовательной школы.

Предмет исследования: элективный курс по планиметрии, разделу геометрии.

Цель исследования заключается в изучении теоретической базы по проектированию элективных курсов, их содержания и последующей реализации в профильном обучении старших классов общеобразовательной школы; разработке элективного курса по геометрии.

Гипотеза выпускной квалификационной работы заключается в предположении о том, что если при разработке элективного курса по геометрии ориентироваться на содержательный компонент методической системы, то элективный курс сможет способствовать достижению целей

профильного обучения; обеспечить преемственную связь между базовым и профильным курсами; дать необходимый минимум знаний для подготовки к экзаменам.

Для достижения цели и проверки сформулированной гипотезы нужно решить следующие задачи:

1. Конкретизировать роль и функции элективного курса по геометрии как части профильного обучения математике в старшем звене общеобразовательной школы.

2. Аргументировать и выделить те принципы, по которым происходит отбор содержания элективного курса по геометрии в условиях профильного обучения математике обучающихся старших классов.

3. Разработать элективный курс по теме «Треугольники и многоугольники» и его методическое обеспечение (программу курса, список рекомендуемой литературы и др.).

Теоретико-методологическая основа исследования. В ходе исследования было применено несколько методов. Основным является теоретический метод. Он дает возможность логическим путем определить роль, цели, функции и задачи элективных курсов в профильном обучении математики старшего звена общеобразовательных школ, основываясь на анализе имеющихся теоретических положений и точек зрения на проблему элективных курсов по геометрии.

Так же в исследовании был использован метод изучения и обобщения сведений, который позволяет правильно сконструировать общие логические выводы о роли профильного обучения в условиях постоянно развивающейся системы образования в Российской Федерации путем изучения и обобщения имеющихся научных фактов. Данный метод, основываясь на выявлении основных ролей и ориентированностей элективных курсов, помогает сформировать выводы об их актуальности в современном образовании.

Помимо двух указанных методов был использован метод анализа и синтеза. Метод анализа позволяет разделить на части изучаемые элементы

профильного обучения на составные части с целью определения и описания их свойств и содержания. И, основываясь на этом, путем последующего синтеза можно определить их роль и влияние на развитие интереса к предмету; уровня развития знаний, умений и навыков в рамках изучаемого предмета; развитие профессиональной ориентации обучающихся.

Научная новизна выпускной квалификационной работы заключается в том, что в данной работе проведено исследование проблемы актуальности и распространенности элективных курсов по геометрии. Так же был разработан элективный курс по теме: «Треугольники и многоугольники», целью которого является не только удовлетворить индивидуальные образовательные потребности каждого обучающегося, но и включает в себя элементы развития способности вести диалог с аудиторией путем включения в элективный курс таких форм взаимодействия как выступления с докладами, обсуждение этого доклада в диспуте; так же в содержание элективного курса включены задачи, решение которых предполагает знание необходимого минимума по предмету, который так же необходим для сдачи выпускных экзаменов в школе.

Теоретическая значимость. В выпускной квалификационной работе был проведен анализ профильного обучения математике, содержание элективных курсов, основные требования, предъявляемые к содержанию программы элективного курса по математике. Теоретическая значимость определяется вкладом в изучение и разработку элективных курсов. Полученные данные углубляют представление о профильном обучении и элективных курсах в целом.

Практическая значимость. Те результаты, которые были получены в ходе работы, могут использоваться учителями математики в разработках своих элективных курсов. Так же разработанный элективный курс является полностью законченным и может быть включен в практическую деятельность учителей без изменений.

Структура выпускной квалификационной работы определена темой, особенностью ее раскрытия и методологией. Работа состоит из введения,

первой главы, состоящей из трех параграфов, второй главы, состоящей из двух параграфов, заключения и списка используемой литературы.

## ГЛАВА 1. ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ

### 1.1 Элективные курсы: понятие, задачи, функции и виды

С 2002 года по настоящее время в плане профильного среднего общего образования на старшей ступени школы введены, так называемые, элективные курсы [33].

Элективный курс представляет собой учебник или учебное пособие, которые являются дополнительными к основному учебнику. Например, элективными курсами являются дополнительные учебные пособия к федеральным учебным курсам по иностранным языкам. Элективный курс может быть посвящен определенной страноведческой теме, искусству, литературе, особенностям того или иного региона, жизни выдающихся людей [2].

Это обязательные курсы по выбору обучающихся из компонента образовательного учреждения [34]. По своей сути, элективные курсы – это курсы, которые входят в состав профильных общеобразовательных предметов, и способствующие углублению профильного обучения [12].

Элективные курсы связаны, в первую очередь, с удовлетворением личных образовательных интересов, потребностей и предрасположенностей каждого ученика. Непосредственно они, по сути, и являются самым важным средством составления индивидуальных программ обучения, так как в наибольшей степени связаны с выбором каждым учеником содержания образования в зависимости от его интересов, способностей, последующих жизненных планов. Элективные курсы как бы «компенсируют» во многом достаточно ограниченные возможности базовых и профильных курсов в удовлетворении разнообразных образовательных потребностей старшеклассников.

Элективные курсы должны помочь в решении следующих задач:



1. Создание условий для того, чтобы ученик утвердился или отказался от сделанного им выбора направления дальнейшего учения и связанного с определенным видом профессиональной деятельности [12].

2. Оказание помощи старшекласснику, совершившему в первом приближении выбор образовательной области для более тщательного изучения, в рассмотрении многообразия видов деятельности, с ней связанных [42].

В соответствии с целями и задачами профильного обучения элективные курсы могут выполнять различные функции:

- повышение уровня изучения базовых учебных предметов;
- изучение смежных учебных предметов на профильном уровне; реализация межпредметных связей, интеграция разрозненных представлений, сформированных в рамках отдельных учебных предметов, в целостную картину мира [26].

- подготовка к сдаче экзаменов на повышенном уровне для учеников, изучающих предмет на базовом уровне;

- ориентация в особенностях будущей профессиональной деятельности, «профессиональная проба»;

- ориентация на совершенствование навыков познавательной, организационной деятельности.

Курсы по выбору разделяются на предпрофильную подготовку (9 класс) и профильную подготовку (10-11 класс).

Основная функция курсов по выбору – профориентационная, то есть ориентирующая в выборе будущего профиля обучения. По этой причине их количество должно быть избыточным в сопоставлении с тем числом элективных курсов, которые обязан выбрать обучающийся. Они должны нести краткосрочный характер. Самым подходящим вариантом по длительности элективного курса в предпрофильной подготовке 8-12 часов. Максимальная продолжительность элективного курса – 34 часа, по 2 часа в неделю.

В предпрофильной подготовке курсы по выбору можно разделить на предметно-ориентированные (пробные) и межпредметные (ориентационные) [37].

Предметно-ориентированные курсы решают следующие задачи:

1. Реализация учеником интереса к учебному предмету.
2. Уточнение готовности и способности осваивать предмет на повышенном уровне.
3. Создание условий к сдаче экзаменов по выбору, то есть к наиболее вероятным предметам будущего профилирования [10].

Итак, предметно-ориентированные курсы ориентированы на то, чтобы у ученика была возможность узнать может ли он изучать предмет на более высоком уровне, интересны ли ему те виды деятельности, которые нужны в целях обучения на данном профиле.

Задачи же межпредметных (ориентационных) курсов заключаются в:

1. Создание базы для ориентации учеников в мире современных профессий.
2. Ознакомление на практике со спецификой типичных видов деятельности, соответствующих наиболее распространенным профессиям.
3. Поддерживание мотивации к тому или иному профилю [10].

Таким образом, межпредметные курсы должны помогать обучающемуся самоопределиваться, активизировать заинтересованность к конкретной области знаний. В качестве учебных материалов для межпредметных курсов для предпрофильной подготовки может использоваться научно-популярная литература, информация СМИ, Интернет и т.п.

Отличительными чертами курсов по выбору в девятом классе являются нестандартизированность, вариативность и краткосрочность. Вариативность курсов по выбору подразумевает, что в рамках предпрофильной подготовки учащийся девятого класса, ориентированный на какой-то определенный профиль (либо еще не определившийся в своем выборе), должен попробовать свои силы в изучении различных курсов, которых должно быть много как

количественно, так и содержательно. Большое число курсов, которые отличаются друг от друга содержательным наполнением, формой организации и технологиями проведения, является одним из важнейших педагогических критериев эффективной предпрофильной подготовки. Временные границы конкретных курсов по выбору могут быть разными [6].

В 10-11 классе элективные курсы выполняют три основные функции:

1. Углубляют профильный курс по предмету;
2. Развивают содержание одного из базисных курсов; позволяют получить усиленную подготовку к сдаче единого государственного экзамена по предмету.
3. Способствуют удовлетворению познавательных интересов в различных областях деятельности человека [17].

Таким образом, можно условно выделить следующие типы элективных курсов:

1. Предметные курсы, задача которых – углубление и расширение знаний по предметам, входящим в базисный учебный план школы.
2. Межпредметные элективные курсы, задача которых – интеграция знаний учащихся о природе и обществе.
3. Элективные курсы по предметам, не входящим в базисный учебный план.

Элективный курс в профильной школе также краткосрочен, но его объем от 36 до 72 часов.

Это главные отличия элективных курсов в 9-х классах и 10-11-х классах, а требования к их разработке и оформлению сходны [6].

## 1.2 Основные особенности профильного обучения математике

В соответствии с Концепцией модернизации российского образования на период до 2010 года создана система специализированной подготовки (профильного обучения) в старших классах общеобразовательных школ, ориентированной на индивидуализацию обучения и социализацию обучающегося, в том числе с учетом реальных потребностей рынка труда, отработки гибкой системы профилей и кооперации старшей ступени школы с учреждениями начального, среднего и высшего профессионального образования.

Профильное обучение – средство дифференциации и индивидуализации обучения, позволяющее за счет изменений в структуре, содержания и организации образовательного процесса более точно учитывать интересы, склонности, способности учащегося, создавать условия для обучения старшеклассников в соответствии с их профильными интересами и намерениями в отношении продолжения образования [21].

Профильное обучение направлено на реализацию личностно-ориентированного учебного процесса [4]. При этом существенно расширяются возможности выстраивания учеником собственной, индивидуальной образовательной линии продвижения.

В педагогической теории под профильным обучением понимают средство дифференциации и индивидуализации обучения, которое позволяет из-за трансформаций в структуре, содержании и организации образовательного процесса более подробно учитывать интересы, склонности и способности обучающихся, формировать условия для обучения старшеклассников в соответствии с их профессиональными интересами и планами в отношении продолжения образования [16].

Модель общеобразовательного учреждения на старшей ступени предусматривает возможность разнообразных комбинаций учебных

предметов, что обеспечивает гибкую систему профильного обучения. Эта система должна включать в себя следующие типы учебных предметов:

- Базовые общеобразовательные. Являются обязательными для всех учащихся во всех профилях обучения [40]. Предлагается следующий набор обязательных общеобразовательных предметов: математика, история, русский язык, иностранные языки, физическая культура, интегрированные курсы обществоведения (для естественно-математического, технологического и иных возможных профилей), естествознания (для гуманитарного, социально-экономического и иных возможных профилей);

- Профильные. Предметы повышенного уровня, определяющие направленность каждого конкретного профиля обучения, являются обязательными для учащихся, выбравших данный профиль обучения;

- Элективные. Обязательные для посещения курсы по выбору учащихся, входящие в состав профиля обучения на старшей ступени школы.

Согласно концепции профильного обучения можно выделить несколько групп основных профилей, для которых математика изучается в наиболее приемлемом для этих профилей объеме [20].

На естественно-математическом профиле математика должна изучаться в профильном курсе в течение двенадцати часов в две недели.

На технологическом профиле математика должна изучаться в профильном курсе в течение десяти часов в две недели.

На социально-экономическом профиле математика должна изучаться в базовом общеобразовательном курсе в течение восьми часов в две недели.

На гуманитарном профиле математика должна изучаться в базовом общеобразовательном курсе в течение шести часов в две недели.

В непрофильных классах и школах математика должна изучаться в базовом общеобразовательном курсе в течение восьми часов в две недели.

Дадим характеристику названию и приведем сжатое содержание элективных курсов для трех вышеперечисленных профилей на рассмотренную в процессе исследования литературу.

Физико-математический профиль:

1. «Функции и графики» (10-11 классы): исследование функций методами математического анализа; касательная к графику функции; асимптоты; представление о выпуклости и вогнутости графиков; исследование функции с помощью второй производной; использование касательной и свойств функции при решении уравнений и неравенств.

2. «Элементы математической логики»: высказывания; операции над высказываниями; отрицание; законы логики; кванторы; неравенства; тождества; равносильность; математические теоремы, их виды; логическая структура теорем; необходимые и достаточные условия.

3. «Задачи с параметром»: задачи, приводящие к исследованию корней квадратного трехчлена; задачи о расположении корней квадратного трехчлена; некоторые уравнения и неравенства, решение которых основано на использовании свойств квадратного трехчлена; уравнения и неравенства, решение которых основано на использовании монотонности и экстремальных свойств входящих в них функций; нестандартные по формулировке задачи, связанные с уравнениями и неравенствами; нахождение числа корней, определение целочисленных корней и т.д.; уравнения и неравенства с параметрами, аналитические и графические методы их решения.

Гуманитарный профиль:

1. «Замечательные теоремы и факты геометрии»: теорема Пифагора, различные способы ее доказательства и ее роль в геометрии; обобщения теоремы Пифагора; теоремы Чевы и Менелая; теоремы Паппа и Дезарга; теорема Паскаля; теорема Птолемея.

2. «Великие русские ученые-математики»: Софья Ковалевская, Пафнутий Львович Чебышев и др.

3. «Элементы математической логики»: высказывания; операции над высказываниями; отрицание; законы логики; кванторы; неравенства; тождества; равносильность; математические теоремы, их виды; логическая структура теорем; необходимые и достаточные условия.

Социально-экономический профиль:

1. «Элементы комбинаторики, теории вероятностей и статистики»: бесформульная комбинаторика, основные понятия комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания; задачи, решаемые с использованием формул комбинаторики; бином Ньютона; треугольник Паскаля; случайное событие; виды событий; алгебра событий; вероятность события; теоремы о вероятности объединения и пересечения событий; схема испытаний Бернулли; статистические характеристики: среднее арифметическое, размах, мода, медиана; статистические исследования: сбор и группировка статистических данных, наглядное представление статистической информации.

2. «Задачи с экономическим содержанием»: вычисление ставок процента в банке, определение начальных вкладов и наращенных сумм, исчисление налогов с населения и предприятий; простые и сложные проценты, расчеты банка с вкладчиками и заемщика с банком, дисконтирование функций в экономике, их графики; средние и предельные издержки, оптимальные размеры производства, эластичность, нахождение наибольшего выпуска при заданных бюджетных ограничениях и наименьших бюджетных затрат при заданном выпуске; излишки потребителей и продавцов, исчисление налогов, последствия дотаций; использование показательных и логарифмических функций в банковской и налоговой системах, в рыночных конструкциях.

3. «Элементы математической логики»: «Элементы математической логики»: высказывания; операции над высказываниями; отрицание; законы логики; кванторы; неравенства; тождества; равносильность; математические теоремы, их виды; логическая структура теорем; необходимые и достаточные условия [22].

Очевидно, что для разных профилей тема и содержание элективного курса могут быть как одинаковы, так и различаться.

Математика справедливо считается одной из наиболее сложных школьных дисциплин и вызывает трудности у большинства обучающихся. Но так же существует огромное число школьников с ярко проявляющимися способностями к данному предмету. Несоответствие в способностях к восприятию курса обучающимися, у которых огромный разрыв в понимании предмета относительно друг друга, крайне огромно [11].

В обучении математики накоплен большой опыт дифференциального подхода к обучению. Это касается, в основном, обучения школьников с хорошими способностями к математике. Но дифференциацию обучения невозможно расценивать только с позиций тех, кому математика дается легко и в отношении только к старшему звену школы. Ориентация на личность ученика требует, чтобы дифференциация обучения математики принимала во внимание потребности абсолютно всех учащихся – не только сильных, но и тех, кому данный предмет дается нелегко или тех, заинтересован другими областями наук.

В общеобразовательной школе, как правило, практикуется профильная подготовка по отдельным предметам, в классах с математическим, гуманитарным, естественнонаучным уклоном, и т.д [41]. Отметим, что актуальным является вопрос о том, что должна ли быть математика обязательным предметом на старшей ступени школы для всех профилей. Учебным планом этот вопрос решен в положительную сторону, что отвечает современным направленностям в образовании. Данное решение продиктовано значимостью математики в прогрессе общества в целом и теми функциями, которые выполняет изучение математики по отношению к развитию индивидуальных качеств личности. Дорофеев Г.В., Кузнецова Л.В., Суворова С.Б., Фирсов В.В, предлагают выделить два типа школьных курсов для завершающей ступени школы: курс общекультурной ориентации (курс А), и курсы повышенного типа.



Курс А рассчитан на учащихся, склонных рассматривать математику только как элемент общего образования и не предполагающих использовать ее непосредственно в своей будущей профессиональной деятельности, т.е. такой курс может быть предложен гуманитарному или естественнонаучному направлению, но здесь надо сказать, что это не правильно.

Курсы повышенного типа должны обеспечить дальнейшее изучение математики и ее применение в качестве элемента профессиональной подготовки. Целесообразно выделить два основных курса повышенного типа:

- Курс В. Предназначен для учащихся выбравших для себя те области деятельности, в которых математика играет роль аппарата, специфического средства для изучения закономерностей окружающего мира;
- Курс С. Ориентирован на тех учащихся, для которых собственно математика является одной из основных целей познания.

Таким образом, для старшей ступени школы целесообразно наличие основных математических курсов – А, В, и С, которые призваны предоставить каждому ученику возможность изучать математику на уровне, соответствующем его интересам, способностям, склонностям. В общем, эти три курса обеспечивают достижение цели профильной дифференциации в математике с психолого-педагогической точки зрения.

Рассмотрим теперь особенности в преподавании математики с точки зрения разделов.

Курс А может быть выбран учащимися, которых интересуют, например, языки, искусство, художественное творчество, спорт, или предметно-практическая деятельность. Т.е. его специфической особенностью должна быть ярко выраженная гуманитарная направленность, иначе говоря, специальная ориентация на умственное развитие человека, на знакомство с математикой, как с областью человеческой деятельности, на формирование тех знаний и умений, которые необходимы для свободной ориентации в

современном мире. Обязательные требования по математике должны совпадать с базовым уровнем подготовки выпускников средней школы.

Для учащихся с научным типом мышления – курс В. Это профили естественнонаучных и научно-гуманитарных направлений: химический, биологический и другие. Следует заметить, что математизация соответствующих наук касается лишь отдельных их областей. Поэтому этот курс строится с учетом того, что математика является хотя и необходимым, но не самым важным предметом. Прежде всего, курс должен обеспечить овладения конкретными математическими знаниями, позволяющими выработать представления о применении математики в профилирующей науке.

Курс С наиболее строгий и полный курс математики – ориентирован на учащихся, выбравших для себя деятельность, непосредственно связанную с математикой, и как следствие какой-то профиль из группы профилей «математического направления», сюда, мы объединили физический и компьютерный. Этот курс направлен, прежде всего, на овладение учащимися необходимым объемом конкретных математических знаний и формирование в этом процессе интеллектуальной культуры личности [11].

Из выше всего сказанного можно сделать вывод о том, что особенности конкретного профиля требуют разных подходов в преподавании математики. Например, для развития абстрактного и логического мышления учащихся какого-либо профиля гуманитарного направления целесообразно повысить внимание к аксиоматическому методу (совсем не обязательно в геометрии), для нужд технического и архитектурного профилей – усилить внимание к стереометрии, предусмотреть знакомство с элементами начертательной геометрии, и т.д.

Приведем мнение опытных педагогов-математиков о важности математических курсов любого профиля.

В работах Дорофеева Г.Е., Кузнецовой Л.В., Суворой С.Б., Фирсова В.В. высказывается идея о возможности профильного обучения в основной школе.

Оно может осуществляться в рамках углубленного изучения математики, начиная с восьмого класса, с целью зарождения интереса к математике на первичном уровне, поддерживать его развитие до познавательного уровня и тем самым создавать основы для выбора математики как предмета для последующего углубленного изучения. В этих классах можно эффективно использовать элективные занятия. Педагогический совет школы определяет исходя из желания учащихся и возможностей школы, набор необходимых элективных курсов.

На второй ступени школы можно осуществить полноценное дифференцирование профильного обучения математике.

Коснемся вопроса методов обучения в профильных классах. Как уже говорилось ранее, дифференциация обучения предполагает дифференцированный подход к учащимся. В данном случае, по мнению, Рональда де Гроота, уместно направление дифференциации по времени обучения, т.е. учащимся дана свобода выбора и они сами могут определить сколько времени нужно будет работать над заданием и когда его закончить [35].

Специфика методов обучения в профильных классах, как отмечается в статье В.Н. Келбакиани, проявляется в большой доле самостоятельной работы учащихся с литературой при изучении нового материала, решении задач и выполнении творческих заданий, в интенсификации обучения с помощью лекционно-семинарской системы, в усилении индивидуальной работы преподавателя с учащимися как на уроках, так и во внеурочной работе [18].

Анализ педагогической литературы по проблемам профильного преподавания математики позволяет сделать выводы:

1. Вводить обучение по направлениям следует лишь после того, как школьники получают достаточно единое базовое математическое образование и утвердятся в своих склонностях.

2. На старшей ступени обучения следует обеспечить, возможно, большее количество направлений обучения или продолжение образования через широкую систему учебных заведений различных типов.

3. При составлении программ и учебников, выборе форм и методов обучения следует учитывать возрастные особенности подростков, склонных к данному виду деятельности, и в то же время не исключать возможности изменить профиль обучения подростку при ошибке в его выборе, учитывать поуровневый подход.

4. Математика должна входить в набор обязательных учебных предметов любого из профилей.

### 1.3 Роль элективных курсов в профильном обучении математике

Элективные курсы (курсы по выбору) играют важную роль в системе профильного обучения на старшей ступени школы. В отличие от факультативных курсов, существовавших в школе, элективные курсы обязательны для старшеклассников [30].

В концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования, утвержденной приказом Минобрнауки России от 18.07.02 №2783, обозначены цели перехода к профильному обучению, среди которых выделим цель создания условий для существенной дифференциации содержания обучения старшеклассников с широкими и гибкими возможностями построения школьниками индивидуальных образовательных программ [32]. С этой целью помимо профильных образовательных предметов вводятся элективные курсы – обязательные для посещения по выбору учащихся.

Набор профильных и элективных курсов на основе базовых общеобразовательных предметов составляет индивидуальную образовательную траекторию для каждого школьника [19]. Элективные курсы реализуются за счет школьного компонента и могут выполнять сразу несколько функций: дополнять содержание профильного курса, развивать содержание одного из базовых курсов, удовлетворять разнообразные познавательные интересы школьников, выходящих за рамки выбранного им профиля. Важно отметить, что в любом случае по элективным курсам единый государственный экзамен не проводится [21].

Элективные курсы направлены как на внутрiproфильную дифференциацию, так и на компенсацию профильной однонаправленности; они способствуют углублению индивидуализации профильного обучения, расширению мировоззренческих представлений учащихся [1].

Перед элективными курсами стоит ряд задач:

- Расширить знания по изучаемым предметам;

- Обеспечить более высокий уровень знаний, умений и навыков;
- Способствовать активному самоопределению, в том числе и профессиональному;
- Формировать и развивать познавательный интерес к предметам [43].

Цель элективных курсов – раскрыть потенциал каждого ребенка, помочь ему определиться с выбором будущей профессии. Так же, как на факультативных занятиях, ученики углубленно изучают интересующий их предмет или область деятельности. Разница в том, что элективные курсы входят в учебный план и являются обязательными для старшеклассников. Но какие именно курсы посещать – решают они сами. Единых стандартов здесь нет, в каждой школе преподаватели разрабатывают свои темы.

Все многообразие элективных курсов можно классифицировать на ряд категорий.

Первый тип – предметные элективные курсы, их задача углубление и расширение знаний по предметам, входящих в базисный учебный план школы (курсы по углубленному изучению предмета, курсы для более детального изучения отдельных разделов, прикладные курсы, курсы для изучения разделов основного материала, которые не входят в образовательную программу).

Второй тип – межпредметные элективные курсы, цель которых – интеграция знаний учащихся о природе и обществе. Такие курсы могут выполнять двоякую функцию: быть компенсирующим курсом для классов гуманитарного и социально-экономического профилей или быть обобщающим курсом для классов естественнонаучного профиля.

И третий тип элективных курсов – не предметные элективные курсы, т.е. изучающие материал, который не входит в базисный учебный план [29]. Это курсы, посвященные психологическим, социальным, культурологическим, искусствоведческим проблемам.

Математика является как базовым, так и профильным предметом по техническому и технологическому направлениям, поэтому содержание элективных курсов должно удовлетворять следующим условиям:

- Научность, системность, последовательность изложения и т.д.;
- Не должно дублировать обязательный минимум содержания по математике;
- Необходимо продумать варианты и формы некой итоговой аттестации при изучении курсов [23].

Содержание курса находится в непосредственной зависимости от состава группы обучающихся и может быть разным:

- Направлено на корректировку, закрепление базовой дидактической единицы школьного образования и оценивается через контрольную работу;
- Включает в себя не только базовую дидактическую единицу школьного образования, но и дидактическую единицу, которая должна идти в зачет как базовый курс по некоторым специальностям среднего профессионального образования;
- Идет в зачет только как часть профильного курса высшего профессионального образования [13].

Остановившись на особенностях математических элективных курсов, исследователи отмечают, что эти курсы предполагают создание условий для формирования и развития у школьников:

- Умения пользоваться справочной литературой;
- Интеллектуальных и практических умений;
- Интересы к изучению математики;
- Самостоятельности в приобретении и применении полученных знаний;
- Способности творчески мыслить, работать в группе, грамотно вести дискуссию, уметь отстаивать свою точку зрения.

Как отмечено в работе Г.А. Ворониной, педагог, подготавливающий и проводящий элективный курс, должен быть теоретически и практически грамотен [8]. В первую очередь следует конкретизировать специфику и содержание курса, насколько он значим в процессе обучения, какие знания и умения он будет формировать у обучающегося, и насколько это для него актуально [43]. При последующем составлении плана курса необходимо принимать во внимание индивидуальные возможности и интересы обучающихся, факт учебно-методической базы. Возникновение элективных курсов в процессе обучения требует модификации методических подходов к обучению. Следует выделить тот факт, что классическими методами обучения сложно сохранять заинтересованность у обучающихся, сформировать навыки и умения, и по этой причине необходима переключенность методик на активные и интерактивные: учебные практики, исследовательские проекты, дискуссии и другие. Элективные курсы, которые входят в концепцию профильного обучения и захватывают 20% программы обучения, однако представляют огромную значимость в реализации индивидуальных потребностей и возможностей каждого обучающегося.

Элективные курсы предназначены для построения личных траекторий образования обучающегося. Занятия могут проходить в традиционной форме, как лекция, семинар, дискуссия, диспут, выступления с докладами и т.д. [8].

Базовые требования к содержанию программ элективных курсов:

- Ориентация на инновационные технологии обучения;
- Учебная нагрузка обучающихся соответствует нормам;
- Соответствие принятым правилам оформления программ;
- Необходимо наличие учебного пособия, содержащего всю нужную информацию;
- Ориентация на непродолжительное проведение курса (не более 72 часов) [3].

Критерии, по которым оценивается программа элективного курса [13]:



1. Степень новизны для учащихся. В программе должен быть материал, который не содержится в базовых курсах.

2. Мотивирующий потенциал программы. Содержание программы должно вызывать интерес у обучающихся.

3. Развивающий потенциал программы. Программа развивает в школьнике интеллект, творческий и эмоциональный потенциал; подразумевает применение методов активного обучения.

4. Содержательные линии программы полны и завершены в соответствии с поставленными целями.

5. Связность и систематичность изложенного материала. Содержание программы должно быть разработано так, чтобы изучение последующих тем было связано со знаниями из предыдущих или со знаниями из базовых курсов; между частными и общими знаниями прослеживается взаимосвязь.

6. Методы обучения. Программа формируется в большей степени на методах активного обучения (проектные, исследовательские, игровые и т.д.).

7. Степень контролируемости. В программе однозначно установлены ожидаемые результаты, ожидающиеся от обучения и те методы с помощью которых будет проверяться их достижимость.

8. Реалистичность с точки зрения ресурсов. Программа должна быть реалистична с точки зрения применения средств (учебно-методические и материально-технические), должна учитываться кадровая составляющая школы.

9. Формальная структура программы. В программе необходимо наличие следующих разделов: пояснительная записка (с обязательной постановкой целей); основное (тематического) содержание; результаты, ожидающиеся от обучения; список использованной литературы.

## ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ОРГАНИЗАЦИИ ИЗУЧЕНИЯ ПЛАНИМЕТРИИ НА ЭЛЕКТИВНОМ КУРСЕ ПО ГЕОМЕТРИИ

### 2.1 Анализ процесса обучения на элективном курсе

В рамках настоящего исследования особое внимание стоит уделить возможности проведения элективного курса по геометрии.

На уроках описываемого курса рассматриваются следующие темы (9-10 класс):

- Вписанная и описанная окружности;
- Прямоугольные треугольники;
- Правильный треугольник;
- Треугольник с углом  $60^\circ$  или  $120^\circ$ ;
- Целочисленные треугольники
- Теорема Менелая;
- Теорема Чевы;
- Прямая Симсона;
- Подерный треугольник;
- Прямая Эйлера и окружность девяти точек;
- Точки Брокара;
- Точка Лемуана;
- Вписанные и описанные четырехугольники;
- Правильные многоугольники;
- Вписанные и описанные многоугольники.

В контексте обучения школьников на элективном курсе интерес представляет раздел планиметрии.

При изучении раздела планиметрии школьники традиционно испытывают затруднения, так как материал требует наличия хорошо развитого абстрактного, логического мышления и мало привязан к реальным событиям

жизни. Геометрия, во-первых, является объективно сложным предметом, во-вторых, учащиеся слабо мотивированы на его изучение.

Содержание, особенности умственной деятельности, учащихся в процессе изучения раздела планиметрии направлены «на развитие системного, алгоритмического мышления, на формирование тех его качеств и особенностей, которые, впоследствии помогут выпускникам школы строить свою профессиональную деятельность наиболее эффективным образом» [7].

Рассмотрим, какие образовательные технологии и методические приемы могут стать эффективным инструментом обучения в рамках элективного курса.

### **Метод проектов**

Метод проектов, на взгляд ряда специалистов, является эффективным инструментом для развития самостоятельности, творческого потенциала, алгоритмического мышления [28]. В результате проектной деятельности учащиеся получают базовые знания и умения, получают профессиональную ориентацию [9].

Применение метода проектов на уроках геометрии в 9-10 классах позволяет развить необходимые умения и навыки. Школьники при подготовке проекта имеют возможность осмыслить полученные результаты, сформировать к ним собственное отношение [5].

Подводя итог исследованию вопросов эффективного применения проектной технологии в рамках элективных курсов по геометрии, отметим, что в ходе проектирования учитель играет роль консультанта, организатора познавательной деятельности учащихся, направляя тем самым обучающихся к деятельности исследовательского, творческого характера.

### **Информационно-коммуникационные технологии**

Информационные и коммуникационные технологии (ИКТ) – это «широкий спектр цифровых технологий, используемых для создания, передачи и распространения информации и оказания услуг (компьютерное оборудование, программное обеспечение, телефонные линии, сотовая связь,

электронная почта, сотовые и спутниковые технологии, сети беспроводной и кабельной связи, мультимедийные средства, а также Интернет)» [24].

В рамках исследования вопросов применения ИКТ на уроках геометрии остановимся на возможностях применения инструментальных средств для обучения.

### **Технология развития критического мышления**

Особое внимание следует уделить технологии развития критического мышления при обучении геометрии.

«Непосредственно под технологией развития критического мышления понимается совокупность разнообразных приёмов, направленных на то, чтобы сначала заинтересовать обучающегося» [26], пробудить в нём исследовательскую, творческую активность, после чего сформировать подходящие условия для осмысления материала и, наконец, «помочь ему обобщить приобретённые знания» [15].

Основа технологии – трехфазовая структура урока:

- Вызов;
- Осмысление;
- Рефлексия.

В – Вызов

Обобщение данных по теме, представление о том, что будет изучаться (индивидуальные + групповые формы – первый этап урока).

О – осмысление

Реализация смысла: учащиеся вступают в контакт с новой информацией, систематизируют ее, сопоставляют с новыми знаниями.

Р – рефлексия

Размышление: обобщение полученной информации, выработка собственного отношения к полученной информации, анализ учебного занятия в целом.

Рассмотрим ряд приемов технологии развития критического мышления.

### 1. Прием «Кластер»

Этапы работы над кластером могут быть следующие:

1. В начале урока, в центре чистого листа (классной доски), пишется ключевое слово или предложение, которое является «сердцем» темы.

2. Вокруг «набрасываются» слова или предложения, выражающие идеи, факты, образы, подходящие для данной темы.

3. По мере увеличения количества записи, появившиеся слова соединяются прямыми линиями с ключевым понятием. У каждого из «спутников» в свою очередь тоже появляются «спутники», таким образом устанавливаются новые логические связи.

Логично применение кластера при повторении основных вопросов темы на уроках обобщения, подготовки к контрольной работе или на первом уроке после каникул, поскольку такой прием позволяет быстро вспомнить основные вопросы изученного материала.

### 2. Чтение со «стопами» (с остановками)

Текст читается дозированно. После каждой смысловой части обязательно делается остановка, задаются «тонкие» или «толстые» вопросы. Во время «стопа» идет обсуждение или дается определенное задание, выполняемое в группах или индивидуально.

В качестве альтернативы такого приема можно предложить продвинутую лекцию. Педагог видоизменяет лекцию, стимулирует учащихся к активному критическому мышлению.

#### 1. Вызов – подготовительная деятельность:

а) представляет темы, проблемный вопрос по содержанию;  
б) работа в парах, обсуждение и запись имеющихся знаний, информационный прогноз, выступление от пар, запись на доске.

2. Анонс содержания первой части лекции. Задание учащимся до начала:  
- по ходу моей лекции один записывает краткую информацию, а другой отмечает в первичных записях (+ -)

#### 3. Осмысление – учитель зачитывает первую часть лекции.

4. Рефлексия – предварительное подведение итогов:

- выделите главную, основную мысль;
- работа в парах, обсуждение услышанного вопроса;
- формулировка общего ответа, подготовка выступления от пар.

3. Фишбоун – схема «рыбий скелет»

Голова – проблема или вопрос; верхние косточки – основные понятия или причины; нижние косточки – суть понятий или следствия; хвост – вывод или ответ на вопрос (см. рис. 1).

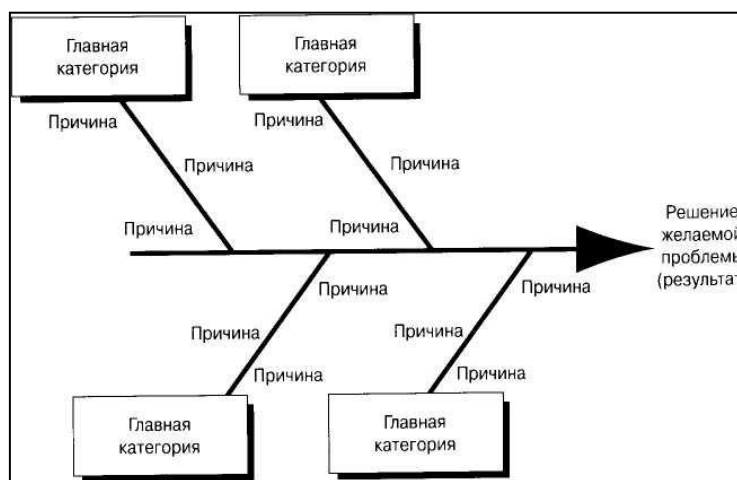


Рисунок 1 – Фишбоун – схема «рыбий скелет»

Заполнение такой схемы позволяет учащимся научиться самостоятельно анализировать данные и применять полученные знания для эффективного исполнения основных социально-экономических ролей.

4. Прием Инсерт

Это интерактивная знаковая система записи для эффективного чтения и размышления.

Инсерт Алгоритм:

1 этап инсерта: предлагается система маркировки текста

v «галочкой» помечается то, что уже известно ученикам

- «минусом» помечается то, что противоречит их представлениям

+ «плюсом» помечается то, что для них интересно и неожиданно

? «вопросительный знак» ставится, если что-то неясно, возникло желание узнать больше

2 этап: учащиеся читают предложенный текст по теме и делают соответствующие пометки

3 этап: последовательное обсуждение каждого маркированного фрагмента, план обсуждения:

- 1) Что в этом тексте знакомо «+»
- 2) Что вы узнали нового «v»
- 3) Что требует для вас пояснения «?»
- 4) Какие ошибки нашли «-»

Работать можно индивидуально и парами, последний способ представляется более эффективным.

Подводя итог анализу применения современных образовательных технологий при изучении тем планиметрии можно сделать вывод о разнообразии метод и форм проведения учебных занятий, каждый из которых направлен на обучение решению сложных задач.

## **2.2 Разработка методического сопровождения процесса организации изучения планиметрии на элективном курсе по геометрии**

Данная программа элективного курса сможет привлечь своим содержанием обучающихся 9-10 классов, которые проявляют интерес к математике и геометрии в частности, и которым интересно углубиться в ее методы и идеи (самостоятельно или под руководством учителя математики). Этот курс освещает указанные, но не проработанные подробно вопросы из курса школьной математики.

При проведении занятий по курсу на первом месте необходимы такие формы работы как дискуссия, диспут, выступление с проектами, докладами-отчетами.

Есть вероятность того, что данный элективный курс сможет помочь обучающемуся найти свое призвание в профессиональной деятельности, которая будет требовать использование точных наук, или приобрести увлечение вне профессии (хобби).

Программа элективного курса состоит из четырех основных элементов:

- Пояснительная записка;
- Основное содержание курса;
- Ожидаемые от обучения результаты;
- Список литературы, рекомендуемой обучающимся.

Перейдем непосредственно к содержанию программы элективного курса.

### **Пояснительная записка**

Элективный курс «Треугольники и многоугольники» рассчитан на один учебный год (31 ч) для учащихся 9-10 классов. Объем необходимых для усвоения знаний, запланированных данной программой, нужен для овладения учениками методами решения некоторого класса задач, необходимых для подготовки и успешной сдачи единого государственного экзамена. Целью данного курса является изучение расширенного спектра задач по



планиметрии, более сложных относительно базового курса. Такими вначале будут задачи по вписанным и описанным треугольникам и прямоугольникам, встречающихся в разделах заданий ЕГЭ, а к завершению курса – задачи на вписанные и описанные многоугольники, требующие умения находить нестандартные пути решения конкретной задачи.

Итак, данный курс имеет значение прикладного и общеобразовательного характера, и дает обширную базу достаточных знаний для дальнейшего изучения следующих разделов геометрии. Безусловно, будут применяться такие традиционные формы организации занятий как лекция и семинар. Но первоочередное значение имеют такие формы как диспут, дискуссия, выступления с докладами, которые будут дополнять лекционные выступления учителя. Не останутся в стороне и различные формы групповой или индивидуальной деятельности обучающихся.

**Таблица 1 – Примерное распределение аудиторной нагрузки по темам (31 ч)**

Занятие	Тема	Учебное время, ч	
		Лекция	Семинар
1	2	3	4
1	Вписанная и описанная окружности	1	-
2	Вписанная и описанная окружности	-	1
3	Прямоугольные треугольники	1	-
4	Прямоугольные треугольники	-	1
5	Правильный треугольник	1	-
6	Правильный треугольник	-	1
7	Треугольник с углом $60^\circ$ или $120^\circ$	1	-

Занятие	Тема	Учебное время, ч	
		Лекция	Семинар
1	2	3	4
8	Треугольник с углом $60^\circ$ или $120^\circ$	-	1
9	Целочисленные треугольники	1	-
10	Целочисленные треугольники	-	1
11	Решение задач	-	1
12	Теорема Менелая	1	-
13	Теорема Менелая	-	1
14	Теорема Чебы	1	-
15	Теорема Чебы	-	1
16	Прямая Симсона	1	-
17	Прямая Симсона	-	1
18	Подерный треугольник	1	-
19	Подерный треугольник	-	1
20	Прямая Эйлера и окружность деяти точек	1	-
21	Прямая Эйлера и окружность деяти точек	-	1
22	Точки Брокара	1	-
23	Точки Брокара	-	1
24	Точка Лемуана	1	-
25	Точка Лемуана	-	1
26	Вписанные и описанные четырёхугольники	1	-
27	Вписанные и описанные четырёхугольники	-	1

Занятие	Тема	Учебное время, ч	
		Лекция	Семинар
1	2	3	4
28	Правильные многоугольники	1	-
29	Правильные многоугольники	-	1
30	Вписанные и описанные многоугольники	1	-
31	Вписанные и описанные многоугольники	-	1

Отметим теперь некоторые варианты выполнения учениками зачетных заданий.

В самом простом варианте это может быть:

1) Ученик решает домашнее индивидуальное задание предложенные учителем задачи из того списка, который завершает каждую тему и называется «Задачи для самостоятельного решения».

2) Группа учеников решает в качестве домашнего задания предложенные учителем задачи из того же раздела «Задачи для самостоятельного решения» или из любого другого источника, предложенного учителем.

Основываясь на результатах выполнения этого задания, учитель выставляет оценку по традиционной пятибалльной системе.

Возможен третий вариант оценивания учащихся: для промежуточной аттестации учащимся предлагается написать рефераты на темы, предлагаемые учителем (список тем можно сообщить учащимся заранее, чтобы они могли выбрать понравившуюся тему, возможно, ученики сами могут предложить собственные темы).

Работа над рефератом может носить как индивидуальный характер, так и групповой. Темы, предназначенные для работы группы учеников, не

исключаются. Ученики могут осуществлять поиск информации по выбранной теме как самостоятельно, так и обратиться к источникам, рекомендованными учителем. По результатам работы над рефератам учащиеся выступают с докладом на уроке или могут принять участие в диспуте на данную тему. Все это соответствующим образом оценивается учителем. Итоговая оценка может выставляться как среднее арифметическое между теми оценками, которые были заслужены учащимися в течение курса. Так же курс может быть завершён написанием итоговой контрольной работы.

### **Основное содержание курса**

#### **Занятие 1. Вписанная и описанная окружности (лекционное занятие).**

Окружность, вписанная в угол. Окружность, вписанная в выпуклый многоугольник. Окружность, вписанная в треугольник. Серединный перпендикуляр. Окружность, описанная около треугольника. Четырёхугольник, вписанный в окружность. Четырёхугольник, описанный около окружности.

Задачи:

1. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 1, угол при вершине, противоположной основанию, равен  $120^\circ$ . Найдите диаметр описанной окружности этого треугольника.

2. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, равен 2. Найдите гипотенузу этого треугольника.

3. В четырёхугольник  $ABCD$  вписана окружность,  $AB = 52, CD = 53$ . Найдите периметр четырёхугольника.

4. Угол  $A$  четырёхугольника  $ABCD$ , вписанного в окружность, равен  $26^\circ$ . Найдите угол  $C$  этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.

#### **Занятие 2. Вписанная и описанная окружности (семинар).**

Решение задач с опорой на знания, полученные на лекционном занятии.

Задачи для работы на уроке:

1. Докажите, что если диагонали вписанного четырехугольника перпендикулярны, то сумма квадратов противоположных сторон четырехугольника равна квадрату диаметра описанной окружности.

2. Пусть  $O_a, O_b, O_c$  – центры невписанных окружностей треугольника  $ABC$ . Докажите, что точки  $A, B, C$  – основания высот треугольника  $O_a, O_b, O_c$ .

Задачи для самостоятельного решения:

1. Докажите, что в любом четырехугольнике, вписанном в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птолемея).

2. На каждой из сторон выпуклого четырехугольника отмечены две точки. Эти точки соединены отрезками так, как показано на рисунке. Известно, что в каждый из закрашенных четырехугольников можно вписать окружность. Докажите, что и в исходный четырехугольник можно вписать окружность.

### **Занятие 3. Прямоугольные треугольники (лекционное занятие).**

Понятие прямоугольного треугольника. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Свойства прямоугольного треугольника.

Задачи для работы на уроке:

1. Пусть  $M$  — середина стороны  $AB$  треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $CM = \frac{AB}{2}$  тогда и только тогда, когда угол  $ACB = 90^\circ$ .

2. Дана трапеция  $ABCD$  с основанием  $AO$ . Биссектрисы внешних углов при вершинах  $A$  и  $B$  пересекаются в точке  $P$ , а при вершинах  $C$  и  $D$  — в точке  $Q$ . Докажите, что длина отрезка  $PQ$  равна половине периметра трапеции.

### **Занятие 4. Прямоугольные треугольники (семинар).**

Решение задач с опорой на знания, полученные на лекционном занятии.

1. Дана трапеция  $ABCD$  с основанием  $AO$ . Биссектрисы внешних углов при вершинах  $A$  и  $B$  пересекаются в точке  $P$ , а при вершинах  $C$  и  $D$  — в точке  $Q$ . Докажите, что длина отрезка  $PQ$  равна половине периметра трапеции.

2. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC$  проведена биссектриса  $CD$ . Прямая, проходящая через точку  $D$  перпендикулярно  $DC$ , пересекает  $AC$  в точке  $E$ . Докажите, что  $EC = 2AD$ .

Для самостоятельного решения:

Сумма углов при основании трапеции равна  $90^\circ$ . Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований, равен полуразности оснований.

### **Занятие 5. Правильный треугольник (лекционное занятие)**

Сторона правильного треугольника. Угол в правильном треугольнике. Периметр треугольника. Высота. Радиус вписанной и описанной окружности. Площадь правильного треугольника.

Задача для работы на уроке:

Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник правильный.

### **Занятие 6. Правильный треугольник (семинар)**

Решение задач с опорой на знания, полученные на лекционном занятии.

1. Точки  $D$  и  $E$  делят стороны  $AC$  и  $AB$  правильного треугольника  $ABC$  в отношениях  $AD:DC = BE:EA = 1:2$ . Прямые  $BD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что угол  $AOC = 90^\circ$ .

2. Из точки  $M$ , лежащей внутри правильного треугольника  $ABC$ , опущены перпендикуляры  $MP, MQ, MR$  на стороны  $AB, BC, CA$  соответственно. Докажите, что  $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = PB^2 + QC^2 + RA^2$  и  $AP + BQ + CR = PB + QC + RA$

Задача для самостоятельного решения:

Докажите, что если точка пересечения высот остроугольного треугольника делит высоты в одном и том же отношении, то треугольник правильный.

### **Занятие 7. Треугольник с углом $60^\circ$ и $120^\circ$ (лекционное занятие)**

Равнобедренные треугольники. Свойства. Доказательство образования арифметической прогрессии тремя углами.

Задача для работы на уроке:

1. В треугольнике  $ABC$  с углом  $A$ , равным  $120^\circ$ , проведены биссектрисы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ . Докажите, что треугольник  $A_1B_1C_1$  прямоугольный.

### Занятие 8. Треугольник с углом $60^\circ$ и $120^\circ$ (лекционное занятие)

Решение задач с опорой на знания, полученные на лекционном занятии.

1. В треугольнике  $ABC$  с углом  $A$ , равным  $120^\circ$ , биссектрисы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что угол  $A_1C_1O = 30^\circ$ .

2. В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $BB_1$  и  $CC_1$ . Докажите, что если описанные окружности треугольников  $ABB_1$  и  $ACC_1$  пересекаются в точке, лежащей на стороне  $BC$ , то угол  $A = 60^\circ$ .

Задачи для самостоятельного решения:

1. а) Докажите, что если угол  $A$  треугольника  $ABC$  равен  $120^\circ$ , то центр описанной окружности и ортоцентр симметричны относительно биссектрисы внешнего угла  $A$ .

б) В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $60^\circ$ ;  $O$  – центр описанной окружности,  $H$  – ортоцентр,  $I$  – центр вписанной окружности, а  $I_a$  – центр невписанной окружности, касающейся стороны  $BC$ . Докажите, что  $IO = IH$  и  $I_aO = I_aH$ .

2. В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $120^\circ$ . Докажите, что из отрезков длиной  $a, b, b + c$  можно составить треугольник.

### Занятие 9. Целочисленные треугольники (лекционное занятие)

Понятие целочисленного треугольника. Основные свойства целых треугольников. Пифагоров треугольник.

Задача для работы на уроке:

Радиус вписанной окружности треугольника равен 1, а длины его сторон – целые числа. Докажите, что эти числа равны 3, 4, 5.

### Занятие 10. Целочисленные треугольники (семинар)

Решение задач с опорой на знания, полученные на лекционном занятии.

Задачи:

1. Длины сторон треугольника – последовательные целые числа. Найдите эти числа, если известно, что из одна из медиан перпендикулярна одной из биссектрис.

2. Длины всех сторон прямоугольного треугольника являются целыми числами, причем наибольший общий делитель этих чисел равен 1. Докажите, что его катеты равны  $2mn$  и  $m^2 - n^2$ , а гипотенуза равна  $m^2 + n^2$ , где  $m$  и  $n$  – натуральные числа.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Укажите два прямоугольных треугольника, из которых можно сложить треугольник, длины сторон и площадь которого – целые числа.

2. Докажите, что если площадь треугольника – целое число, а длины сторон – последовательные натуральные числа, то этот треугольник можно сложить из двух прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами.

### Занятие 11. Решение задач

Задачи для работы на уроке:

1. Треугольника  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  таковы, что их соответственные углы равны или составляют в сумме  $180^\circ$ . Докажите, что в действительности все соответственные углы равны.

2. Внутри треугольника  $ABC$  взята произвольная точка  $O$  и построены точки  $A_1, B_1, C_1$ , симметричные  $O$  относительно середин сторон  $BC, CA$  и  $AB$ . Докажите, что  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ , и прямые  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке.

3. а) Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

б) Пусть  $H$  – точка пересечения высот треугольника  $ABC$ ,  $R$  – радиус описанной окружности. Докажите, что  $AH^2 + BC^2 = 4R^2$  и  $AH = BC |ctg \alpha|$ .

### Занятие 12. Теорема Менелая (лекционное занятие)

Теорема Менелая. Обратная теорема.

Задачи для работы на уроке:



1. а) В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы внешних углов  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  (точки  $A_1, B_1, C_1$  лежат на прямых  $BC, CA, AB$ ). Докажите, что точки  $A_1, B_1, C_1$  лежат на одной прямой.

б) В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AA_1$  и  $BB_1$  и биссектриса внешнего угла  $CC_1$ . Докажите, что точки  $A_1, B_1, C_1$  лежат на одной прямой.

2. Касательные к описанной окружности неравнобедренного треугольника  $ABC$  в точках  $A, B$  и  $C$  пересекают продолжения сторон в точках  $A_1, B_1, C_1$ . Докажите, что точки  $A_1, B_1, C_1$  лежат на одной прямой.

### **Занятие 13. Теорема Менелая (семинар)**

Решение задач с опорой на знания, полученные на лекционном занятии.

1. В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AA_1$  и  $BB_1$  и биссектриса внешнего угла  $CC_1$ . Докажите, что точки  $A_1, B_1, C_1$  лежат на одной прямой.

2. Касательные к описанной окружности неравнобедренного треугольника  $ABC$  в точках  $A, B$  и  $C$  пересекают продолжения сторон в точках  $A_1, B_1, C_1$ . Докажите, что точки  $A_1, B_1, C_1$  лежат на одной прямой.

Задача для самостоятельного решения:

Прямые  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке  $O$ . Докажите, что точки пересечения прямых  $AB$  и  $A_1B_1, BC$  и  $B_1C_1, AC$  и  $A_1C_1$  лежат на одной прямой (Дезарг).

### **Занятие 14. Теорема Чевы (лекция)**

Теорема Чевы. Обратная теорема. Точка Жергонна. Точка Нагеля.

Задача для работы на уроке:

Вписанная (или невписанная) окружность треугольника  $ABC$  касается прямых  $BC, CA$  и  $AB$  в точках  $A_1, B_1, C_1$ . Докажите, что прямые  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке.

### **Занятие 15. Теорема Чевы (семинар)**

Решение задач с опорой на знания, полученные на лекционном занятии.

1. Дан треугольник  $ABC$ . На прямых  $AB, BC$  и  $CA$  взяты точки  $C_1, A_1$  и  $B_1$ , причем  $k$  из них лежат на сторонах треугольника и  $3 - k$  – на продолжениях сторон. Пусть  $R = \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1}$ .

Докажите, что:

а) точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда  $R = 1$  и  $k$  четно.

б) прямые  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда  $R = 1$  и  $k$  нечетно.

2. Докажите, что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

Задача для самостоятельного решения:

Прямые  $AP, BP$  и  $CP$  пересекают стороны треугольника  $ABC$  (или их продолжения) в точках  $A_1, B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что:

а) прямые, проходящие через середины сторон  $BC, CA$  и  $AB$  параллельно прямым  $AP, BP$  и  $CP$ , пересекаются в одной точке;

б) прямые, соединяющие середины сторон  $BC, CA$  и  $AB$  с серединами отрезков  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ , пересекаются в одной точке.

### **Занятие 16. Прямая Симсона (лекционное занятие)**

Понятие прямой Симсона. Основные свойства.

Задача для работы на уроке:

Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки  $P$  описанной окружности треугольника на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой.

### **Занятие 17. Прямая Симсона (семинар)**

Решение задач с опорой на знания, полученные на лекционном занятии.

1. Основания перпендикуляров, опущенных из некоторой точки  $P$  на стороны треугольника или их продолжения, лежат на одной прямой. Докажите, что точка  $P$  лежит на описанной окружности треугольника.

2. Точки  $A, B$  и  $C$  лежат на одной прямой, точка  $P$  — вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников  $ABP, BCP, ACP$  и точка  $P$  лежат на одной окружности.

Задачи для самостоятельного решения:

1. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AD$  и из точки  $D$  опущены перпендикуляры  $DB'$  и  $DC'$  на прямые  $AC$  и  $AB$ ; точка  $M$  лежит на прямой  $B'C'$ , причем  $DM \perp BC$ . Докажите, что точка  $M$  лежит на медиане  $AA_1$ .

2. Докажите, что в при замене в определении прямой Симсона угла  $90^\circ$  на угол  $\alpha$  она повернется на угол  $90^\circ - \alpha$ .

### Занятие 18. Подерный треугольник (лекционное занятие)

Определение. Свойства подерного треугольника. Подерная окружность. Теоремы о вершинах подерного треугольника.

Задача для работы на уроке:

Пусть  $A_1B_1C_1$  — подерный треугольник точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $B_1C_1 = BC \cdot \frac{AP}{2R}$ , где  $R$  — радиус описанной окружности треугольника  $ABC$ .

### Занятие 19. Подерный треугольник.

Решение задач с опорой на знания, полученные на лекционном занятии.

1. Прямые  $AP, BP$  и  $CP$  пересекают описанную окружность треугольника  $ABC$  в точках  $A_2, B_2$  и  $C_2$ ;  $A_1B_1C_1$  — подерный треугольник точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$ .

2. Треугольник  $ABC$  вписан в окружность радиуса  $R$  с центром  $O$ . Докажите, что площадь подерного треугольника точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$  равна  $\frac{1}{4} \left| 1 - \frac{d^2}{R^2} \right| S_{ABC}$ , где  $d = PO$ .

Задача для самостоятельного решения:

Внутри остроугольного треугольника  $ABC$  дана точка  $P$ . Опустив из нее перпендикуляры  $PA_1, PB_1$  и  $PC_1$  на стороны, получим  $\Delta A_1B_1C_1$ . Проведем для

него ту же операцию, получим  $\Delta A_2 B_2 C_2$ , а затем  $\Delta A_3 B_3 C_3$ . Докажите, что  $\Delta A_3 B_3 C_3 \sim \Delta ABC$ .

**Занятие 20. Прямая Эйлера и окружность девяти точек (лекционное занятие)**

История. Определение. Свойства прямой Эйлера. Окружность девяти точек.

Задача для работы на уроке:

Пусть  $H$  – точка пересечения высот треугольника  $ABC$ ,  $O$  – центр описанной окружности,  $M$  – точка пересечения медиан. Докажите, что точка  $M$  лежит на отрезке  $OH$ , причем  $OM:MH = 1:2$ .

**Занятие 20. Прямая Эйлера и окружность девяти точек (семинар)**

Решение задач с опорой на знания, полученные на лекционном занятии.

1. Докажите, что середины сторон треугольника, основания высот и середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот с вершинами, лежат на одной окружности, причем центром этой окружности является середина отрезка  $OH$ .

2. Какие стороны пересекает прямая Эйлера в остроугольном и тупоугольном треугольниках?

Задача для самостоятельного решения:

Высоты треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ .

а) докажите, что треугольники  $ABC, HBC, AHC$  и  $ABH$  имеют общую окружность девяти точек;

б) докажите, что прямые Эйлера треугольников  $ABC, HBC, AHC$  и  $ABH$  пересекаются в одной точке;

в) докажите, что центры описанных окружностей треугольников  $ABC, HBC, AHC$  и  $ABH$  образуют четырехугольник, симметричный треугольнику  $HABC$ .

**Занятие 21. Точки Брокара (лекционное занятие)**

Определение. Построение. Свойства. Угол Брокара.

Задача для работы на уроке:

а) Докажите, что внутри треугольника  $ABC$  существует такая точка  $P$ , что  $\angle ABP = \angle CAP = \angle BCP$ .

б) На сторонах треугольника  $ABC$  внешним образом построены подобные ему треугольники  $CA_1B$ ,  $CAB_1$  и  $C_1AB$  (углы при первых вершинах всех четырех треугольников равны и т.д.). Докажите, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке, причем эта точка совпадает с точкой  $P$  из задачи а).

### Занятие 22. Точки Брокара

Решение задач с опорой на знания, полученные на лекционном занятии.

а) Через точку Брокара треугольника  $ABC$  проведены прямые  $AP$ ,  $BP$  и  $CP$ , пересекающие описанную окружность в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что  $\triangle ABC = \triangle B_1C_1A_1$ .

б) Треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $S$ . Докажите, что треугольник, образованный точками пересечения прямых  $PA$ ,  $PB$  и  $PC$  с окружностью  $S$ , может быть равен треугольнику  $ABC$  не более чем для восьми различных точек  $P$ . (Предполагается, что точки пересечения прямых  $PA$ ,  $PB$  и  $PC$  с окружностью отличны от точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ .)

Задачи для самостоятельного решения:

Пусть точка  $P$  – точка брокара треугольника  $ABC$ . Угол  $\varphi = \angle ABP = \angle BCP = \angle CAP$  называют углом Брокара этого треугольника. Докажите, что

а)  $ctg\varphi = ctg\alpha + ctg\beta + ctg\gamma$  и  $\sin^3\varphi = \sin(\alpha - \varphi)\sin(\beta - \varphi)\sin(\gamma - \varphi)$

б) Докажите, что точки Брокара треугольника  $ABC$  изогонально сопряжены;

в) Касательная к описанной окружности треугольника  $ABC$  в точке  $C$  и прямая, проходящая через точку  $B$  параллельно  $AC$ , пересекаются в точке  $A_1$ . Докажите, что угол Брокара треугольника  $ABC$  равен углу  $A_1AC$ .

### Занятие 24. Точка Лемуана (лекционное занятие)

Симедиана. Точка Лемуана. Круги Лемуана. Свойства

Задачи для работы на уроке:

1. Прямые  $AM$  и  $AN$  симметричны относительно биссектрисы угла  $A$  треугольника  $ABC$  (точки  $M$  и  $N$  лежат на прямой  $BC$ ). Докажите, что  $\frac{BM \cdot BN}{CM \cdot CN} = \frac{c^2}{b^2}$ . В частности, если  $AS$  – симедиана, то  $\frac{BS}{CS} = \frac{c^2}{b^2}$ .

### **Занятие 25. Точка Лемуана (семинар)**

Решение задач с опорой на знания, полученные на лекционном занятии.

1. Выразите длину симедианы  $AS$  через длины сторон треугольника  $ABC$ .
2. Докажите, что если отрезок  $B_1C_1$  антипараллелен стороне  $BC$ , то  $B_1C_1 \perp OA$ , где  $O$  – центр описанной окружности.

Задача для самостоятельного решения:

Касательная к точке  $B$  к описанной окружности  $S$  треугольника  $ABC$  пересекает прямую  $AC$  в точке  $K$ . Из точки  $K$  проведена вторая касательная  $KD$  к окружности  $S$ . Докажите, что  $BD$  – симедиана треугольника  $ABC$ .

### **Занятие 26. Вписанные и описанные четырехугольники (лекционное занятие)**

Теорема о вписанном четырехугольнике. Теорема об описанном четырехугольнике. Теорема Птолемея. Теорема Брахмагупты.

Задачи для работы на уроке:

Докажите, что если диагонали вписанного четырехугольника перпендикулярны, то сумма квадратов противоположных сторон четырехугольника равна квадрату диаметра описанной окружности.

### **Занятие 27. Вписанные и описанные четырехугольники (семинар)**

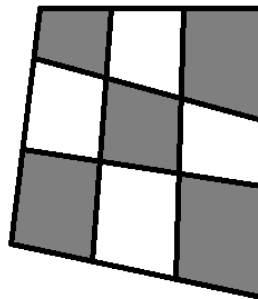
Решение задач с опорой на знания, полученные на лекционном занятии.

1. Докажите, что в любом четырехугольнике, вписанном в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птолемея).

2. На окружности даны точки  $A, B, C, D$  в указанном порядке. Точка  $M$  – середина дуги  $AB$ ,  $K$  – точка пересечения хорд  $AB$  и  $MD$ . Докажите, что около четырехугольника  $CDKE$  можно описать окружность.

Задачи для самостоятельного решения:

1. На каждой из сторон выпуклого четырехугольника отмечены две точки. Эти точки соединены отрезками так, как показано на рисунке. Известно, что в каждый из закрашенных четырехугольников можно вписать окружность. Докажите, что и в исходный четырехугольник можно вписать окружность.



2. Трапеция  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$  описана около окружности. Известно, что  $\angle BCD = 2\angle BAD$ . Найти  $\frac{AB}{BC}$ .

### Занятие 28. Правильные многоугольники (лекционное занятие)

Определение. Свойства. Признаки. Основные формулы.

Задача для работы на уроке:

1. Докажите, что в вершинах правильного  $n$ -угольника можно расставить действительные числа  $x_1, \dots, x_n$ , все отличные от нуля, так, чтобы для любого правильного  $k$ -угольника, все вершины которого являются вершинами исходного  $n$ -угольника, сумма чисел, стоящих в его вершинах, равнялась нулю.

### Занятие 29. Правильные многоугольники (семинар)

Решение задач с опорой на знания, полученные на лекционном занятии.

1. Точка  $A$  лежит внутри правильного десятиугольника  $X_1 \dots X_{10}$ , а точка  $B$  – вне его. Пусть  $a = \vec{AX_1} + \dots + \vec{AX_{10}}$  и  $b = \vec{BX_1} + \dots + \vec{BX_{10}}$ . Может ли оказаться, что  $|a| > |b|$ ?

2. Найдите сумму квадратов длин всех сторон и диагоналей правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность радиуса  $R$ .

Задача для самостоятельного решения:

Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки  $X$  до вершин правильного  $n$ -угольника будет наименьшей, если  $X$  – центр  $n$ -угольника.

### Занятие 30. Вписанные и описанные многоугольники.

Многоугольник, вписанный в круг. Многоугольник, описанный около круга. Вписанная и описанная окружность. Правильный многоугольник. Основные формулы.

Задача для работы на уроке:

1. В окружность вписан  $2n$ -угольник  $A_1 \dots A_{2n}$ . Пусть  $p_1, \dots, p_{2n}$  – расстояния от произвольной точки  $M$  окружности до сторон  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{2n}A_1$ . Докажите, что  $p_1p_3 \dots p_{2n-1} = p_2p_4 \dots p_{2n}$ .

### Занятие 31. Вписанные и описанные многоугольники.

Решение задач с опорой на знания, полученные на лекционном занятии.

1. Окружность радиуса  $r$  касается сторон многоугольника в точках  $A_1, \dots, A_n$ , причем длина стороны, на которой лежит точка  $A_i$ , равна  $a_i$ . Точка  $X$  удалена от центра окружности на расстояние  $d$ . Докажите, что  $a_1XA_1^2 + \dots + a_nXA_n^2 = P(r^2 + d^2)$ , где  $P$  – периметр многоугольника.

2. Докажите, что точки пересечения противоположных сторон (если эти стороны не параллельны) вписанного шестиугольника лежат на одной прямой (Паскаль).

Задача для самостоятельного решения:

1. Около окружности описан  $n$ -угольник  $A_1 \dots A_n$ ;  $l$  – произвольная касательная к окружности, не проходящая через вершины  $n$ -угольника. Пусть



$a_i$  – расстояние от вершины  $A_i$  до прямой  $l$ ,  $b_i$  – расстояние от точки касания стороны  $A_iA_{i+1}$  с окружностью до прямой  $l$ . Докажите, что:

а) величина  $\frac{b_1 \dots b_n}{a_1 \dots a_n}$  не зависит от выбора прямой  $l$ ;

б) величина  $\frac{a_1 a_3 \dots a_{2m-1}}{a_2 a_4 \dots a_{2m}}$  не зависит от выбора прямой  $l$ , если  $n = 2m$ .

### Организация и проведение аттестации обучающихся

Для оценки динамики усвоения учащимися теоретического материала и для мотивации к регулярным занятиям, психологически большую роль играет факт предоставления ученику информации об уровне его знаний и умений, а значит, и об ожидающей итоговой оценке. Помимо этого, для учителя знание о владении его учениками теорией и способностями ее применить на практике, поможет внести необходимые коррективы в процесс обучения (возможно, изменить темп или стиль, в котором проводятся занятия, повторить ранее изученный материал).

Так же надо помнить о проблеме накопления оценок для итоговой аттестации. Итоговая аттестация необходима для того, чтобы оценить успехи обучающихся в освоении выбранного ими курса.

В силу того, что материал, составляющий данный курс, состоит из более сложных задач и объема всего курса, выполнение самостоятельных работ заняло бы значительную часть времени от занятия. Выполнение письменной работы может потребовать очень много усилий от ученика, так же может заставить его испытать очередной стресс.

Именно по этой причине вместо самостоятельных работ ученикам предлагается написать реферата с последующим выступлением с сообщением на занятиях. Написание реферата возможно как самостоятельно каждым учеником, так и в малых группах. Для учеников, которые не успели или по какой-то причине не смогли взять себе тему для реферата, предлагается выполнение индивидуального домашнего задания на оценку. Шкала оценок может быть традиционной («неудовлетворительно» – 2, «удовлетворительно» – 3, «хорошо» – 4, «отлично» – 5).

Одной из форм для самостоятельной работы может являться подготовка краткого доклада как дополнение к лекционной части занятия.

Для завершения курса может быть выбрана итоговая контрольная работа. Для отчета по итогам проведения курса такая работа имеет смысл. Но для проверки усвоения материала обучающимися пользы мало, в силу усложненного содержания курса.

### **Возможные критерии оценок**

Критерии по выставлению оценок могут быть следующими.

Оценка «отлично» (5) – учащийся блестяще освоил теоретический материал курса, получил навыки в его применении при решении конкретных математических задач, имеющих прикладной характер; в процессе написания и защиты реферата, выполнения стендовых докладов, работы над индивидуальными домашними заданиями ученик продемонстрировал умение работать с литературными источниками; он отличался активным участием в диспутах и обсуждениях проблем, поставленных и решаемых в данном курсе; кроме того, ученик отличился творческим подходом и большой заинтересованностью как при освоении курса в целом, так и при выполнении порученных ему учителем заданий. Он научился работать в малых группах, находить и использовать информацию в рекомендованных бумажных и электронных изданиях, очевиден и несомненен его интеллектуальный рост и рост его общих умений.

Оценка «хорошо» (4) – учащийся освоил идеи и методы данного курса в такой степени, что может справиться со стандартным заданием; ученик справился с написанием реферата, но проявил чисто компилятивные способности, выполнил (но без проявления явных творческих способностей) домашние задания; можно сказать, что оценка «хорошо» — это оценка за усердие и прилежание, которые привели к определенным положительным результатам, свидетельствующим и об интеллектуальном росте, и о возрастании общих умений слушателя курса.

Оценка «удовлетворительно» (3) – учащийся освоил наиболее простые идеи и методы курса, что позволило ему достаточно успешно выполнить такие задания, как написание реферата (пусть при этом проявились его чисто компилятивные способности), в итоговой контрольной самого простого состава задач ученик справился с 4-5 задачами.

Оценка «неудовлетворительно» (2) – ученик не проявил ни прилежания, ни заинтересованности в освоении курса (скорее всего, выбор им этого элективного курса оказался ошибкой), он халатно отнесся к написанию реферата и выполнению индивидуальных домашних заданий; дискуссии были для ученика неинтересны, и он уклонялся от участия в них, в итоговой контрольной работе самого простого состава задач он справился всего с 1-2 задачами.

### **Ожидаемые результаты**

В результате изучения программы разработанного элективного курса обучающиеся должны:

- правильно использовать новые термины, которые связаны с основными понятиями в геометрии;
- понимать основные свойства треугольников и многоугольников;
- иметь навык правильного построения геометрических фигур;
- обладать способностью решать задачи геометрии различными методами;
- самостоятельно работать со справочной литературой;
- уметь находить и анализировать необходимую информацию;
- иметь навык публичного выступления и ответов на вопросы.

### **Список рекомендуемой обучающимся литературы**

1. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С. Б. Геометрия. Доп. главы к учебнику 8 кл.: Учеб. пособие для учащихся школ и классов с углубл. изуч. математики / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б.Кадомцев и др.-М.: Вита-пресс, 2004.

2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. Геометрия: Учебник для 7-9 классов средней школы / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 1990.
3. Иванов К.А. О пропорциональных отрезках в треугольнике / Математика в школе, 2004. – №8.
4. Качалкина Е. Применение теорем Чевы и Менелая/Математика. Издательский дом «Первое сентября», 2004, – №13. – с.23-26
5. Мякишев А.Г. Элементы геометрии треугольника. – Библиотека «Математическое просвещение» – М.: Издательство Московского центра непрерывного математического образования, 2002.
6. Пантелеев В.П. Пропорциональные отрезки и то, что за ними/ Математика в школе, 2004,- №8.
7. Портал естественных наук. Дополнительные соотношения между элементами в треугольнике. – <http://e-science.ru/math/theory>
8. Шарыгин И.Ф. Геометрия 7-9 кл.: Учеб. для общеобразоват. учеб.завед.- М: Дрофа, 2000.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги, можно сделать вывод о том, что концепция современного школьного образования в старших классах предоставляет обучающимся возможность самостоятельно выбрать не только уровень, но и направления подготовки в различных областях математической науки. Организация математического образования в школе основывается на принципах дифференцированного обучения, таким образом, обучающиеся сами выбирают интересующий их профиль, в число которых входит и математический.

Методика дифференцированного обучения во многом подтверждена опытом становления и развития школы в России. В середине XIX века уже существовало разделение в гимназическом образовании в виде двух направлений подготовки: классическая гимназия, служащая основой для подготовки поступления в высшие учебные заведения, а также реальная, призванная обеспечивать подготовку в средние специальные учебные заведения. По итогам Первого Всероссийского съезда работников просвещения, состоявшегося в 1918 году и утвердившего стратегию развития народного образования в стране, были определены следующие направления профильного обучения: гуманитарное, естественно-математическое и техническое. А позднее, в 1966 году, была предложена новая система, включающая в себя идею факультативного обучения и создание школ с углубленным изучением предметов. Законом Российской Федерации «Об образовании» от 1992 года было официально утверждено право на существование многообразия системы образования в виде широкого выбора типов и видов образовательных учреждений и программ.

В ходе изучения проблематики разработки элективных курсов в системе профильного образования математике на старшей ступени образования в рамках средней общеобразовательной школы в рамках теоретического

исследования было дано определение понятию «элективный курс» и рассмотрены виды элективных курсов, их функции, цели и задачи.

На этом этапе изучения теоретического вопроса было описано, что элективный курс представляет собой некое дополнение к основному учебнику по предмету. Суть элективного курса в углублении профильного обучения в рамках общеобразовательных предметов. Удовлетворить личные образовательные интересы каждого обучающегося – основная цель каждого элективного курса.

Решение задач, стоящих перед элективным курсом сводится к оказанию помощи старшекласснику в анализе собственных научных интересов и предпочтений, в определении с дальнейшей профессиональной деятельностью. Исходя из целей и задач, были описаны функции элективных курсов. Их суть сводится к проведению профориентационной работы, т.е. работы, которая ориентирует ученика на выбор профиля последующего обучения.

Помимо этого, была выделена типология элективных курсов: по межпредметной связи, по непосредственной связи с предметом, по предметам, которые не входят в базовый учебный план.

Для продолжения дальнейшей работы по теме необходимо было изучить основные особенности профильного обучения математике. Необходимость определения его как такового обусловлено невозможностью изучения поставленного вопроса. Направленность профильного обучения ориентировано на дифференциацию и индивидуализацию процесса обучения, изменяющее его организацию, структуру и содержание с целью учета склонностей, способностей и интереса учащихся и создания для них приемлемых условий для обучения.

После изучения концепции профильного обучения были выделены группы профилей, в рамках которых математика изучается в наиболее приемлемом объеме. Для каждого курса было описано необходимое время

обучения математике, так же для профилей были приведены примеры элективных курсов с их сжатым содержанием.

Основываясь на исследованиях Дорофеева Г.В., Кузнецовой Л.В., Суворовой С.Б., Фирсова В.В были приведены теоретические аспекты разделения элективных курсов по сложности содержания описанием и обоснованием каждого типа.

Логическим продолжением выпускной квалификационной работы является выявление роли элективных курсов в профильном обучении математике. После краткого описания сути элективных курсов, были описаны:

- Условия содержания элективного курса;
- Зависимость содержания курса от состава обучаемых групп;
- Элементы деятельности школьников, которые формируются и развиваются у школьников с учетом особенностей математических элективных курсов;
- Базовые требования к содержанию программ элективных курсов;
- Критерии, по которым оценивается программа элективного курса.

Переходя непосредственно к анализу практической части выпускной квалификационной работы, можно отметить, что эта часть разделена на два параграфа: разработку комплекса методов работы с обучающимися на уроках и на непосредственно разработку самого элективного курса.

В рамках первого параграфа сформирован список тем для изучения и обоснован выбор планиметрии как раздела геометрии. Для успешной реализации описанных тем в рамках разрабатываемого элективного курса был разработан и аргументирован комплекс образовательных технологий и методических приемов, которые является эффективным инструментарием для обучения. К ним относятся:

- Метод проектов;
- Информационно-коммуникационные технологии;

- Технология развития критического мышления с полным описанием этапов и используемых приемов;

Каждая из указанных технологий и приемов направлены на эффективное обучение теоретическим и практическим аспектам преподаваемого материала в рамках элективного курса.

Следующий параграф посвящен разработке самого элективного курса. Содержание курса ориентировано на обучающихся 9-10 классов, имеющих интерес и предрасположенность к изучению геометрии как раздела математической науки. Курс направлен на изучение более широкого круга задач, более сложных относительно базового курса.

Программа разработанного элективного курса состоит из четырех основных элементов:

- Пояснительная записка;
- Основное содержание курса;
- Ожидаемые от обучения результаты;
- Список литературы, рекомендуемой обучающимся.

Также была разработана итоговая аттестация обучающихся в рамках этого элективного курса и критерии итоговой оценки знаний.

Подводя общий итог, можно отметить, что поставленные перед началом работы задачи были успешно решены, а именно:

1. Конкретизирована роль и функции элективного курса по геометрии.
2. Выделены и аргументированы принципы отбора содержания элективного курса;
3. Разработан элективный курс по теме «Треугольники и многоугольники».

Посредством решения данных задач, поставленная перед исследованием цель была успешно достигнута, а именно была изучена теоретическая база по проектированию элективных курсов и был разработан элективный курс; доказана гипотеза исследования.



Материалы данной выпускной квалификационной работы могут быть использованы как учителями математики для доработки, внедрения собственных идей, реализации в практики школ, так и студентами-практикантами для подготовки к проведению занятий не только в рамках базового курса математики, но и подготовки к проведению элективных курсов.

## ИСТОЧНИКИ И ЛИТЕРАТУРА

1. Абакумова Н.Н. Компетентностный подход в образовании: организация и диагностика / Н.Н. Абакумова, Малкова И.Ю. – Т.: Томский государственный университет, – 2007. – 368 с.
2. Азимов Э.Г. Новый словарь методических терминов и понятий (теория и практика обучения языкам). / Э.Г. Азимов, А.Н. Щукин. – М.: Издательство ИКАР, 2009. – 448 с.
3. Артемова Л.К. «Профильное обучение»: опыт, проблемы, пути решения / Л.К. Артемова. – Школьные технологии, 2003. – с.22-31.
4. Афанасьева Т. П., Ерошин В. И. Модели организации профильного обучения на основе индивидуальных учебных планов: Сборник научно-методических материалов. / Т.П. Афанасьева, В.И. Ерошин. – М.: ЗАО Академ Пресс, 2005
5. Берштейн А. Педагогика на кончиках пальцев. Введение в специальность. / А. Берштейн. – М.: Образовательные проекты, 2012. – 544 с.
6. Васькова И.Д. Организация элективных курсов. – Режим доступа: <https://portalpedagoga.ru/servisy/publik/publ?id=10247>. – Дата доступа: 10.11.2016. – Портал педагога
7. Воройский Ф. С. Информатика. Энциклопедический словарь-справочник: введение в современные информационные и телекоммуникационные технологии в терминах и фактах [Текст] / Ф.С. Воройский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 768 с.
8. Воронина Г.А. Элективные курсы: алгоритмы создания, примеры программ: практическое руководство для учителя. / Г.А. Воронина. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 128 с.
9. Газизов Т.Т. Модель внедрения элементов робототехники в образовательный процесс школы [Текст]/ Т.Т. Газизов, О.С. Нетесова, А.Н. Стась// Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники, 2013. – С.180-184.

10. Дахин А. Компетенция и компетентность: сколько их у российского школьника? / А. Дахин. – Народное образование, 2004. С.136-144
11. Дороев Г.В. Дифференциация в обучении математике / Г.В. Дороев, Л.В. Кузнецова, С.Б. Суворова, В.В. Фирсов. – Математика в школе, 1990. С. 15-21.
12. Егорова А. М. Профильное обучение и элективные курсы в средней школе [Текст] / А.М. Егорова. – СПб.: Реноме, 2012. С. 173-179.
13. Ермаков. Д. Элективные учебные курсы для профильного обучения / Д. Ермаков, Г. Петрова. – Народное образование, 2004.
14. Жафяров, А.Ж. Элективные курсы по геометрии для профильной школы: учебно-дидактический комплекс / А.Ж. Жафяров. – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2005.
15. Загашев И.О. Учим детей критически мыслить. / И.О. Загашев, С.И. Заир-Бек, И.В. Муштавинская. – СПб: Альянс «Дельта», 2003.
16. Инструктивное письмо Управления образования Белгородской области «О преподавании предмета «Математика» в профильных классах», 2004.
17. Инструктивно-методическое письмо «О преподавании предмета «Физика» в общеобразовательных организациях Белгородской области в 2015-2016 учебном году». – Режим доступа: [http://belcdo.bel-licei-inter.ru/DocFiles/metodmail15/IMP\\_Fizika\\_15-16.pdf](http://belcdo.bel-licei-inter.ru/DocFiles/metodmail15/IMP_Fizika_15-16.pdf). – Дата обращения: 11.11.2016.
18. Кельбакиани В.Н. Контуры дифференциации в преподавании математики / В.Н. Кельбакиани. – Математика в школе, 1990. – С. 14-15.
19. Коновалова Е.И. «Элективный курс как фактор реализации индивидуальной образовательной траектории школьников» / Е.И. Коновалова. – Вестник Бурятского государственного университета, выпуск №15, – 2013.
20. Концепция модернизации российского образования на период до 2010 года [Текст] // Нормативные документы в образовании. – 2003. – с. 2–21.

21. Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования (Приказ МО № 2783 от 18.07.02).// Вестник образования: Сборник приказов и инструкций МО РФ. - Декабрь 2002.- Пилотный №4.- Профильное обучение. Тематический выпуск. - С.3-95

22. Крутихина М.В. Элективные курсы по математике [Текст]: учебно-методические рекомендации. / М.В. Крутихина, З.В. Шилова. – Киров, ВятГГУ. – 2006. – с. 40.

23. Кузнецов А. Профильное обучение: проблемы, перспективы развития / А. Кузнецов. – Народное образование, 2003. – с.85-88.

24. Лопушанская Н.Д. Использование «задачного» подхода в условиях адаптивной системы обучения программированию [Электронный ресурс] / Н.Д. Лопушанская// Фестиваль педагогических идей «открытый урок». – Режим доступа: <http://festival.1september.ru/articles/524846/> (дата обращения 05.02.2017).

25. Муштавинская И.В. Технология развития критического мышления на уроке и в системе подготовки учителя. Учебно-методическое пособие. / И.В. Муштавинская. – М.: КАРО, 2014. – 144 с.

26. Николина Н.А. Великие имена: русские лингвисты: элективный курс для учащихся 9-11 кл. / Н.А. Николина. – М.: Просвещение, 2008. – 380 с.

27. Орлов, В.В. Геометрическое моделирование окружающего мира. 10-11 классы / В.В. Орлов, Н.С. Подходова, Е.А. Ермак, И.А. Иванов. – Дрофа, 2009. – 80 с.

28. Пахомова Н.Ю. Метод учебного проекта в образовательном учреждении. Пособие для учителей и студентов педагогических вузов. / Н.Ю. Пахомова. – М.: АРКТИ, 2013. – 112 с.

29. Петрусевич А.А. Практика современного образования: учеб. пособие для студентов педагогических учебных заведений / А. А. Петрусевич, В.В. Лоренц, – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2012. – 300 с.

30. Письмо Министерства образования Российской Федерации (Минобразование России) «Элективные курсы в профильном обучении» / Департамент общего и дошкольного образования №14-51-277/13 от 13.11.2003.

31. Потоскуев Е.В. Векторы и координаты как аппарат решения геометрических задач: учебное пособие. Элективные курсы. / Е.В. Потоскуев. – М.: Дрофа, 2010.

32. Приказ Министерства Образования РФ от 18.07.2002 №2783 «Об утверждении Концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования».

33. Профильное обучение в современной российской школе. Сборник научных статей. – М.: РУДН, 2015. – 176 с.

34. Рогова Г.А. Элективные курсы как содержательная основа профильного обучения [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://vio.uchim.info/Vio\\_58/cd\\_site/articles/art\\_4\\_7.htm](http://vio.uchim.info/Vio_58/cd_site/articles/art_4_7.htm) (дата обращения 05.02.2017).

35. Рональд Де Гроот. Дифференциация в образовании / Рональд Де Гроот. – Директор школы, 1994. №5 – с. 12-18.

36. Сагателова, Л.С. Геометрия. Решаем задачи по планиметрии. Практикум. / Л.С. Сагателова. – Учитель, 2009

37. Сапожникова А.Ю. Предпрофильная подготовка учащихся: Разработка и экспертиза курсов по выбору. Структура и содержание портфолио (методические рекомендации). / А.Ю. Сапожникова, И.Л. Ефремова, Л.Е. Савашкевич. – Вологда: ВИРО, 2006. – 84 с.

38. Смирнова, И.М. Многогранники. / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. – Мнемозина, 2007. – 96 с.

39. Смирнова, И.М. Четырехмерная геометрия. 10-11 классы / И.М. Смирнова. – МЦНМО, 2010

40. Сыздыкова А.Н. Рекомендации по организации профильного обучения [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://pandia.ru/text/79/495/54398.php> (дата обращения 12.12.2016).

41. Цыбикова В.К. Преподавание математики в различных профильных направлениях / В.К. Цыбикова. – Вестник Бурятского государственного университета, выпуск №15, – 2010.

42. Элективные курсы в профильном обучении: Образовательная область «математика» / Министерство образования РФ – Национальный фонд подготовки кадров. –М.: Вита-Пресс, 2004.

43. Элективные курсы в профильном обучении: Письмо Департамента общего и дошкольного образования №14-51-277/13 от 13.11.2003 г. / Народное образование, – с. 265-266.