ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Выпускная квалификационная работа
обучающейся по направлению подготовки 44.03.01
Педагогическое образование, профиль математика
очной формы обучения, группы 02041402
Кабанцовой Лады Руслановны

Научный руководитель
к.ф.- м.н., доцент
Сокольский А.Г

БЕЛГОРОД 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Тригонометрия как наука возникла более двух тысяч лет назад. Из источников следует, что создателями тригонометрии являются древние астрономы. В настоящее время область использования тригонометрии заметно расширилась, сегодня она включает почти все естественные науки, технику и так далее.

Уже давно тригонометрия, как отдельная дисциплина перестала существовать, и начала переходить в алгебру и геометрию, а также в алгебру и начала анализа

Очень давно греки называли тригонометрию самой важной наукой. Вследствие этого сложилось, что особое место в школьном курсе уделялось именно тригонометрии.

Тригонометрические уравнения занимают одно из центральных мест в курсе математики средней школы, как по содержанию учебного материала, так и по способам учебно-познавательной деятельности, которые могут и должны быть сформированы при их изучении и применены к решению большого числа задач теоретического и практического характера.

Можно выделить несколько следующих направлений в изучении тригонометрических уравнений и неравенств:

1. Решение уравнений и неравенств;
2. Решение систем уравнений и неравенств;
3. Отбор корней.

В ходе анализа учебной и научно–методической литературы выяснилось, что большое внимание уделяется всем трем направлениям.

В настоящее время необходимо усилить прикладные направления в обучении математике. Как показал анализ содержания школьного математического образования, возможности решения тригонометрических уравнений в этом плане достаточно широки.

Заметим, что решение тригонометрических уравнений и неравенств систематизирует знания школьников, связанные с учебным материалом по тригонометрии и даёт возможность повысить уровень знаний по данной теме.

Актуальность исследования: анализ материала, посвященного решению тригонометрических уравнений в учебных пособиях «Алгебра и начала анализа» для 10 – 11 классов разных авторов, учет целей изучения тригонометрических уравнений, а так же обязательных результатов обучения, связанных с рассматриваемой темой, свидетельствует о том, что перед учителем стоит задача – формировать у учащихся умения решать уравнения каждого вида, развивая тем самым общие тригонометрические представления, которые помогут обучающимся при решении не только школьного курса задач, но и при подготовке к ЕГЭ.

Объект исследования: процесс обучения математике.

Предмет исследования: методика формирования умений решать тригонометрические уравнения и неравенства.

Цель исследования: рассмотрение некоторых направлений в изучении тригонометрических уравнений и неравенств:

Гипотеза исследования: если выделить основные умения, необходимые при решении тригонометрических уравнений и неравенств, разработать методику их формирования, то это будет способствовать качественному обучению решать тригонометрические уравнения и неравенства.

Под осознанным и качественным изучением тригонометрии мы понимаем процесс обучения, осуществляемый с учетом идей личностно ориентированного обучения, при реализации которого не допускается формальной передачи знаний и схоластической отработки умений, т.е. изучение тригонометрии должно опираться как на логическую, так и на образную составляющие мышление, при этом учащимся должны быть предоставлены возможности для дифференциации и индивидуализации.

В процессе исследования и проверке достоверности гипотезы необходимо решить следующие *задачи*:

1. Провести анализ психолого-педагогической, учебной и методической литературы по проблеме исследования.

2. Выявить роль тригонометрических уравнений и неравенств в обучении математики.

3. Выделить основы формирования умений необходимых для решения тригонометрических уравнений и неравенств.

4. Классифицировать методы решения тригонометрических уравнений.

5. Выявить проблемы, возникающие при отборе корней в хоре решений уравнений.

6. Классифицировать способы отбора корней.

Структура и объем работы. Работа состоит из шести разделов, введения и заключения. Введение представляет собой описание актуальности изучения тригонометрии в современном мире. Первый раздел посвящен развитию тригонометрии, как науки. Во втором разделе проанализировано содержание информации о тригонометрических уравнениях и неравенствах в различных школьных учебниках. Третий раздел описывает элементарные тригонометрические функции, плавный подход к главной теме дипломной работы. В четвертом и пятом разделах широко рассматриваются методы решения тригонометрических уравнений и неравенств. Шестой раздел посвящен использованию единичной окружности при изучении школьного курса тригонометрии. В третьей главе дипломной работы представлен разработанный элективный курс для учеников 10х классов общеобразовательных школ.

ГЛАВА I ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ.

1.1 История развития тригонометрии как науки

Тригонометрия - один из наиболее молодых разделов элементарной математики, получившей свое окончательное оформление только в XVIII в., хотя известно, что ее отдельные идеи уходят корнями глубоко в древность, к античному миру и к математическому творчеству индусов (К. Птолемей, II в., Аль Баттани, IX в., и др.). Европейские математики достигли высокой степени совершенства в вычислении таблиц натуральных синусов и тангенсов (Региомонтанус, XV в., Ретикус и Питискус, XVI в., и др.)

Определение «тригонометрия» греческого происхождения, которое обозначает «измерение треугольников»: τρίγωνον (треугольник) и греч. μέτρεο (измеряю) то есть измерение треугольников — это раздел математики, в котором изучаются тригонометрические функции и использование их в такой науке, как тригонометрия. Данный термин являлся названием книги Бартоломеуса Питискуса (1561—1613) и впервые использовался непосредственно в труде ученого, а сама наука была использована для расчётов в астрономии, архитектуре и геодезии еще в глубокой древности [5].

Отталкиваясь от информации, предложенной выше, сделаем вывод, что тригонометрия, как наука возникла на основе геометрии, а также имела геометрический язык и использовалась при решении различных задач. В период формирования алгебраической символики начала создаваться основа для исследования тригонометрических функций, как числового аргумента, база аналитической теории тригонометрических функций.

Современный вид тригонометрии придал Леонард Эйлер. В трактате «Введение в анализ бесконечных» (1748) Эйлер дал определение тригонометрических функций, эквивалентное современному, и соответственно определил обратные функции. Если его предшественники понимали синус и прочие понятия геометрически, то есть как линии в круге или треугольнике, то после работ Эйлера $sinx, cosx, tgx$ и т. д. стали рассматриваться как безразмерные аналитические функции действительного и комплексного переменного.

В основе трудов Л. Эйлера существовали учебники тригонометрии, излагавшие информацию только в научной форме. Определение сторон малыми буквами и противолежащих углов — соответствующими большими буквами позволило ему облегчить все формулы, придать им четкость и согласованность. [8]

Также Эйлеру принадлежала идея анализа тригонометрических функций, равно как отношения определенных линий к радиусу круга, т. е. как числа, причём радиус круга как «полный синус» он принял за единицу. Эйлер получил несколько других соотношений, определил взаимосвязь тригонометрических функций с показательными, определил правило знаков функций для всех четвертей, получил обобщённую формулу приведения и освободил тригонометрию от многих ошибок, допускавшихся в ряде европейских учебников математики.

Детище Л. Эйлера в последующем стало фундаментом для различных учебников тригонометрии. Одно из первых руководств, «Сокращённая математика» С. Румовского (1760), отдел «Начальные основания плоской тригонометрии», начинается так: «Тригонометрия плоская есть знание через Арифметические выкладки сыскивать треугольники, которые геометрия черченьем находит». Вышеизложенное приводит к решению треугольников, производятся сложные вычисления, причем, учения о функциях не имеется [5].

Определение тригонометрических функций на всей числовой прямой стало возможным благодаря исследованиям Эйлера не только допустимых отрицательных углов, но и углов боле 360°. Именно он в своих работах впервые доказал, что косинус и тангенс прямого угла отрицательные. Разложение целых степеней косинуса и синуса тоже стало заслугой этого ученого. Общая теория тригонометрических рядов и изучение сходимости полученных рядов не были объектами исследований Эйлера. Однако, работая над решением смежных задач, он сделал много открытий в этой области. Именно благодаря его работам продолжилась история тригонометрии. Кратко в своих трудах он касался и вопросов сферической тригонометрии [9].

Можно сделать вывод, что тригонометрия появилась на геометрической основе, обладала геометрическим языком и с ее помощью решались различные геометрические задачи. Развитие алгебраической символики позволило записывать тригонометрические соотношения в виде формул; применение отрицательных чисел позволило рассматривать направленные углы и дуги и распространить понятие тригонометрических линий (определенных отрезков в круге) для любых углов. В этот период создалась база для изучения тригонометрических функций как функций числового аргумента, основа аналитической теории тригонометрических (круговых) функций. Аналитический аппарат, позволяющий вычислять значения тригонометрических функций с любой степенью точности, был разработан Ньютоном [5].

Великий русский ученый Н.И Лобачевский завершил начатое Эйлером аналитическое построение теории тригонометрических функций.

Благодаря развитию физики, механики и других технических наук обусловлена современная точка зрения на тригонометрические функции, как на функции числового аргумента. Такие функции вошли в основу математического аппарата, с помощью которого были изучены различные периодические процессы. Ж. Фурье $(1768 - 1830)$ было показано, что любое периодическое движение со всякой степенью точности может быть представлено в виде суммы простейших синусоидальных (гармонических) колебаний. На заре тригонометрии соотношение было выражено зависимостью между площадями квадратов, построенных на сторонах переменного прямоугольного треугольника с гипотенузой равной 1, то в дальнейшем такое отношение начало отражать также сложение двух колебательных движений с происходящей при этом интерференцией. Делаем вывод, что на начальных стадиях своего развития тригонометрия являлась средством решения вычислительных геометрических задач.

В этот период даны обобщения многим терминам тригонометрии и, в частности, выведены соотношения, где n – натуральное число, и др. Функции и рассматриваются теперь как суммы степенных рядов [11].

Почти также изложен и учебник В. Никитина и П. Суворова. Вполне научное изложение тригонометрии даёт акад. М. Е. Головин в своём учебнике «Плоская и сферическая тригонометрия с алгебраическими доказательствами», 1789. В этой книге можно найти все важнейшие формулы тригонометрии почти в том виде, в каком принято излагать их в XIX в. (за исключением обратных тригонометрических функций). Книга предназначена для гимназий. «Плоская тригонометрия,— говорит автор,— есть наука, имеющая предметом из трёх данных и числами изображённых частей прямолинейного треугольника определять три прочие его части». Учебник состоит из 4 равных частей. Общие понятия, решение треугольников, приложение тригонометрии к практической геометрии и геодезии и, наконец, теорема сложения. Учебник Н. Фусса отмежёвывается от сферической тригонометрии. [9]

Шаг вперёд делает академик М. В. Остроградский в 1851 г. В своём конспекте по тригонометрии для руководства в военно-учебных заведениях он выступает как сторонник определения тригонометрических функций, на первом этапе их изучения, как отношений сторон в прямоугольном треугольнике с последующим обобщением их определения и распространением его на углы любой величины.

В России первые сведения о тригонометрии были опубликованы в сборнике «Таблицы логарифмов, синусов и тангенсов к изучению мудролюбивых тщателей», опубликованном при участии Л. Ф. Магницкого в 1703 году. В 1714 году появилось содержательное руководство «Геометрия практика», первый русский учебник по тригонометрии, ориентированный на прикладные задачи артиллерии, навигации и геодезии.

В конце XVIII века в Петербурге возникла авторитетная тригонометрическая школа (А. И. Лексель, Н. И. Фусс, Ф. И. Шуберт), которая внесла большой вклад в плоскую и сферическую тригонометрию [10].

В начале XIX века Н. И. Лобачевский добавил к плоской и сферической тригонометрии третий раздел — гиперболическую (для геометрии Лобачевского, первую работу в этой области опубликовал Ф. А. Тауринус в 1826 году). Лобачевский показал, что формулы сферической тригонометрии переходят в формулы гиперболической тригонометрии при замене длин сторон треугольника a, b, c на мнимые величины: ai, bi, ci — или, что эквивалентно, при замене тригонометрических функций на соответствующие гиперболические. Важный вклад в развитие тригонометрии внес Брахмагупта (VII в) , открывший несколько тригонометрических соотношений, в том числе и те, которые в современной записи приняли другой вид [24].

Тригонометрия не относится к прикладным наукам, в реальной повседневной жизни ее задачи редко применяются. Однако этот факт не снижает ее значимости. Очень важна, например, техника триангуляции, которая позволяет астрономам достаточно точно измерить расстояние до недалеких звезд и осуществлять контроль за системами навигации спутников [22]. Также тригонометрию применяют в навигации, теории музыки, акустике, оптике, анализе финансовых рынков, электронике, теории вероятностей, статистике, биологии, медицине (например, в расшифровке ультразвуковых исследований УЗИ и компьютерной томографии), фармацевтике, химии, теории чисел, сейсмологии, метеорологии, океанологии, картографии, многих разделах физики, топографии и геодезии, архитектуре, фонетике, экономике, электронной технике, машиностроении, компьютерной графике, кристаллографии и т. д. История тригонометрии и ее роль в изучении естественно-математических наук изучаются и до сих пор. Возможно, в ближайшем будущем областей ее применения станет еще больше.

Наука тригонометрия возникала и развивалась, разумеется, не один век. Основные понятия, составляющие основу этого раздела математической науки, также не сразу появились. Таким образом, понятие «синус» имеет очень долгую историю. Упоминания о различных отношениях отрезков треугольников и окружностей обнаруживаются еще в научных трудах, датируемых III веком до нашей эры. Работы следующих великих древних ученых, Евклида, Архимеда, Апполония Пергского, уже содержали первые исследования этих соотношений [7].

Новые открытия требовали определенных терминологических уточнений. Именно поэтому, индийский учёный Ариабхата дает хорде название «джива», означающее «тетива лука». Когда арабские математические тексты переводились на латынь, термин заменили близким по значению синусом (т. е. «изгиб»). Слово «косинус» появилось намного позже. Этот термин является сокращенным вариантом латинской фразы «дополнительный синус». Возникновение тангенсов связано с расшифровкой задачи определения длины тени. Термин «тангенс» ввел в X веке арабский математик Абу-ль-Вафа, составивший первые таблицы для определения тангенсов и котангенсов. Но европейские ученые не знали об этих достижениях. Немецкий математик и астроном Регимонтан заново открывает эти понятия в 1467 г. Доказательство теоремы тангенсов – его заслуга. А переводится этот термин как «касающийся» [25].

1.2 Содержание и анализ материала по тригонометрии в различных школьных учебниках.

Проанализируем материалы по теме тригонометрических уравнений и неравенств в различных учебниках ведущих авторов.

Анализ материала, посвящённого решению тригонометрических уравнений и неравенств в учебнике «Алгебра и начала анализа» для 10-11 классов под ред. А.Н.Колмогорова и в учебнике «Алгебра и начала анализа» для 10-11 классов авторов Ш.А. Алимова и др. свидетельствует о том, что разнообразные виды тригонометрических уравнений и неравенств представлены в пособиях по математике для средней школы. Это означает, что перед учителем стоит задача формирования у учащихся умения решать тригонометрические уравнения и неравенства [11].

Рассмотрим содержание различных материалов курса тригонометрии, изложенного в различных учебниках по математике за курс 10 – 11 класс средней школы, чтобы сравнить, проанализировать и выявить наиболее приемлемую методику внедрения данной темы в школьный курс математики.

Глейзер Г.Д. Алгебра и начала анализа. 10-11

Учебник разбит на 12 глав. Материал, касающийся темы «Решение тригонометрических уравнений и неравенств» представлен в главе 6 «Тригонометрические функции и тождества» после изучения глав «Действительные числа», «Уравнения и неравенства», «Функции», «Производная», «Применение производной». Обращаясь в главе 6 к теме «Тригонометрические функции и тождества » [13].

Г.Д. Глейзер считает нужным повторить такие темы как: измерение углов; вращательное движение; техника вычислений. Далее вводятся: определения и простейшие свойства тригонометрических функций; значения тригонометрических функций, понятие четной и нечетной функции. В этой же главе вводятся основные формулы тригонометрии такие как:

$sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$

$tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1$

$tg\,\alpha = sin\,\alpha \div cos\,\alpha$

$ctg\,\alpha = cos\,\alpha \div sin\,\alpha$

$1 + tg^2\,\alpha = 1 \div cos^2\,\alpha$

$1 + ctg^2\,\alpha = 1 \div sin^2\,\alpha$.

Тут же Г.Д Глейзер рассматривает вопрос решения простейших тригонометрических уравнений на множестве действительных чисел. Г.Д.

Глейзер так же показывает примеры решения тригонометрических уравнений с помощью: подстановки, замены переменной [15].

Схема изучения темы «Решение тригонометрические уравнений» определяется следующим образом: функция → уравнения → преобразования.

Алимов Ш.А. Алгебра 9.

Алимов Ш.А вводит тему «Элементы тригонометрии» уже в 9 классе. Это отличает его от Г.Д. Глейзера и А.Н. Колмогорова. Учебник разбит на 5 глав. В конце изучения каждой главы есть рубрика «Проверь себя», в которой ученикам предлагается решить несколько примеров и сделать вывод как он изучил данную тему. В курсе изучения математики в 9 классе 4 глава посвящена «Элементам тригонометрии». Здесь автор вводит понятия радиальная мера угла, понятия синус и косинус и тангенс, основные тригонометрические тождества с ними связанные, формулы сложения и формулы приведения. С точки зрения применения учебник Алимова удобен для самостоятельного изучения учащимися, т.к. он содержит сильную теоретическую базу. Изложение теоретического материала ведётся очень подробно. В условиях острой нехватки часов для проведения занятий в классе возрастает значение самостоятельной работы учеников с книгой. Опираясь на учебник, учитель прекрасно разберётся в том, что надо рассказать учащимся на уроке, что заставить их запомнить, а что предложить им просто прочесть дома.

К недостаткам можно отнести не очень большое количество упражнений по этой теме в самом учебнике.

Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа $10-11$

Учебник содержит 6 глав. Схема изучения материала по теме «Решение тригонометрических уравнений и неравенств» абсолютно отличается от предыдущих, так как изначально были рассмотрены тригонометрические функции числового аргумента и основные формулы тригонометрии. Также в первой главе, но несколько позже, рассматриваются основные свойства тригонометрических функций, их графики и их исследование. После этого вводятся понятия арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс и наравне с этим решение простейших тригонометрических уравнений.

Автор не называет методов решения тригонометрических уравнений, а описывает алгоритм их решения. Таким образом, схема изучения выглядит так: преобразования → функции → уравнения.

Отметим, что в учебнике содержится довольно большое количество дидактических материалов, как простых, так и более сложных. Это естественно обеспечивает учителю возможность выбирать и менять задания для учащихся [19].

С точки зрения изложения теоретического материала сказать, что учебник идеально подходит для самостоятельного изучения, мы не можем.

Анализ содержания набора задач в теме «Тригонометрические уравнения» приводит к следующим выводам:

1) ведущими являются простейшие тригонометрические уравнения, решение которых основано на определениях соответствующих функций в понятиях арксинуса, арккосинуса, арктангенса числа;

2) практически отсутствуют тригонометрические уравнения, способ решения которых основан на свойстве ограниченности синуса и косинуса;

3) если говорить о связях приемов решения тригонометрических уравнений с приемами тождественных преобразований тригонометрических и алгебраических выражений, то следует отметить, что эти приемы в учебном пособии представлены бедно и однообразно. Рассматриваются приемы тождественных преобразований:

а) тригонометрические выражения:

- прием использования основного тригонометрического тождества;
- прием использования формул двойного и половинного аргументы;
- прием преобразования суммы тригонометрических выражений в произведение;

б) алгебраических выражений:

- прием разложения на множители;

- прием преобразования тригонометрического выражения, представляющего собой однородный многочлен относительно синуса и косинуса.

Использование указанных приемов приводит к тригонометрическим уравнениям, которые условно можно разделить на следующие виды:

а) сводящиеся к квадратным, относительно тригонометрической функции;

б) сводящиеся к дробно-рациональным, относительно тригонометрической функции;

в) сводящиеся к однородным;

г) сводящиеся к виду, где является тригонометрической функцией.

Тригонометрия является одним из важнейших составляющих школьного курса алгебры. Представленный курс предполагает задачи, решение которых можно осуществить только лишь целенаправленно пройдя определенную подготовку [21].

Анализируя школьные учебники алгебры, можно уверенно определить какое же место занимает решение тригонометрических уравнений и неравенств в предложенном курсе.

Прежде чем изучать тему «Решение тригонометрических уравнений и неравенств» необходимо изучить такую тему как « Преобразование тригонометрических выражений» и «Основные свойства и графики тригонометрических функций» Также учащиеся знакомятся со следующими понятиями: арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс.

Исходя из используемой литературы, можно заключить, что осознание важности изучаемого материала, в нашем случае тригонометрии, учениками познается не в процессе самого изучения, а в процессе применения освоенного материала при решении каких-либо задач. Чаще всего закрепленный материал становится средством для решения остальных задач [22].

К примеру, решение уравнения $\cos 2x * \cos x + \sin 2x * \sin x = 1$, , будет сведено к простейшему уравнению $\cos x = 1$, причем частному виду простейшего выражения после элементарного преобразования, стоящего в левой части уравнения по формулам сложения косинуса. Такая же ситуация может сложить и при решении тригонометрического неравенства. К примеру

$$tgx < \frac{tg\frac{\pi}{15} + tg\frac{4\pi}{15}}{1 - tg\frac{\pi}{15}tg\frac{4\pi}{15}}$$

Данное неравенство возможно решить только путем преобразования выражения, стоящего в правой части неравенства. Таким образом, , дальше с помощью таблицы основных значений тригонометрических функций получаем следующее неравенство . Решение такого неравенства не вызовет затруднений у школьников.

Заметим, что на таких примерах учащиеся могут замечать пользу от изучения формул тригонометрии. Именно с их помощью, на первый взгляд сложнейшее уравнение превращается в абсолютно простое и знакомое. Аналогичным образом происходит решение тригонометрических неравенств [15].

Именно для систематизации знаний учащихся тригонометрические уравнения и неравенства должна изучаться после формул преобразования тригонометрических выражений, а также после графиков тригонометрических функций.

Если тригонометрические уравнения и неравенства будут изучены до темы «Преобразование тригонометрических выражений», то в таком случае место их изучения будет определяться по-другому. Тут на изучение тригонометрических уравнений и неравенств будет отводиться больше времени: каждую формулу необходимо рассмотреть на определенном примере. То есть в этом случае уравнение или неравенство выступает как средство закрепления тригонометрических формул [1].

Следовательно, при разных подходах к изучению тригонометрии, роль уравнений и неравенств, безусловно, очень велика независимо от времени изучения.

1.3 Элементарные тригонометрические уравнения

Элементарными тригонометрическими уравнениями являются уравнения вида $f\ kx + b\ = a$, где $f\ x$ - одна из тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x, \tan x, \cot x$. Элементарные тригонометрические уравнения могут иметь бесконечно большое число корней. К примеру, уравнению $sin\,x = 1/(2)$ будут удовлетворять значения : $x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}$,

$x_3 = \pi/6 + 2\pi$, $x_4 = \pi/6 - 2\pi$.

Общая формула по которой будет находиться $\sin x = a$, где $|a| \leq 1$ будет выглядеть так : $x = (-1)^n\, arcsin\, a + \pi n$.

В данном случае n может принимать любые значения, каждому из которых будет соответствовать определенный корень уравнения. В этой формуле n является параметром. Его запись обычно выглядит так $n \in Z$, показывая тем самым, что параметр может принимать любые целые значения [1].

ГЛАВА II СОДЕРЖАТЕЛЬНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ.

2.1 Виды тригонометрических уравнений и методы их решений.

При решении многих математических задач, в основном встречающихся до 10 класса, порядок совершения вычислительных действий, приводящих к заданной цели, будут определены однозначно. К задачам такого типа относятся линейные и квадратные уравнения и неравенства, дробные уравнения, а также уравнения, сводящиеся к квадратным. Абсолютно ясно, что успех решения различных задач будет целиком и полностью зависеть от правильности выбора метода решения, а также последовательности этапов решения. При этом обязательно владеть навыками выполнения тождественных преобразований [14].

Другая ситуация получается с тригонометрическими уравнениями. Определить, что уравнение является тригонометрическим, не составляет особого труда. Дальнейшие сложности возникают при определении последовательности действий, приводящих к верному ответу.

Исходя из внешнего вида уравнения, иногда сложно определить его тип. Но не зная этого практически невозможно выбрать нужную формулу из огромного их количества.

Материал, относящийся к тригонометрии, изучается не единым блоком, учащиеся не представляют себе весь спектр применения тригонометрического материала, дробление на отдельные темы приводит к тому, что тригонометрия изучается в течение нескольких лет [13].

Необходимость классификации уравнений вызывается невозможностью найти общий метод их решения. Очевидно, что классифицировать тригонометрические уравнения имеет смысл с опорой на методы их решения. Мы будем рассматривать типы уравнений в той последовательности, которая представляется нам наиболее приемлемой для обучения школьников, то есть в последовательности, построенной в соответствии с принципом «от простого к сложному» [12].

Итак, начнем исследование тригонометрических уравнений с определения.

Тригонометрические уравнения – это уравнения, содержащие неизвестное под знаком тригонометрической функции. Решение тригонометрического уравнения состоит из двух этапов.

- Преобразование уравнения для получения его простейшего вида
- Решение полученного простейшего тригонометрического уравнения.

К определению тригонометрического уравнения различные авторы подходят по-разному. Мы назовем тригонометрическим уравнением равенство тригонометрических выражений, содержащих неизвестную переменную только под знаком тригонометрических функций [5].

Уравнения $\cos 3x = \sin x$, $sin\, 3x + sin\, 5x = sin\, 4x$ и так далее, суть тригонометрического уравнения. Уравнения $sin\, x = \frac{1}{2}x, tg\, 2x = x$ и т.д не являются тригонометрическими. Они относятся к типу трансцендентных уравнений и, как правило, решаются приближенно или графически. Может случиться так, что уравнение не является тригонометрическим согласно определению, однако оно может быть сведено к тригонометрическому. Например, $2(x - 6)cos2x = x - 6$. Мы видим, что $x - 6$ не содержится под знаком тригонометрических функций, однако оно решается аналитически: $(x - 6) * (2\, cos2x - 1) = 0$, откуда $x = 6$ или $cos\, 2x = \frac{1}{2}$, $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n,$ где $n \in Z$.

1)Уравнения, сводящиеся к простейшим

Почти все тригонометрические уравнения являются сводящимися к простейшим, однако можно выделить уравнения, сводящиеся к простейшим гораздо легче. Для начала проанализируем все виды простейших уравнений.

К уравнениям такого вида относятся: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Этим уравнениям следует уделить особе внимания, так как это основные тригонометрические уравнения без которых невозможно решить любые другие.

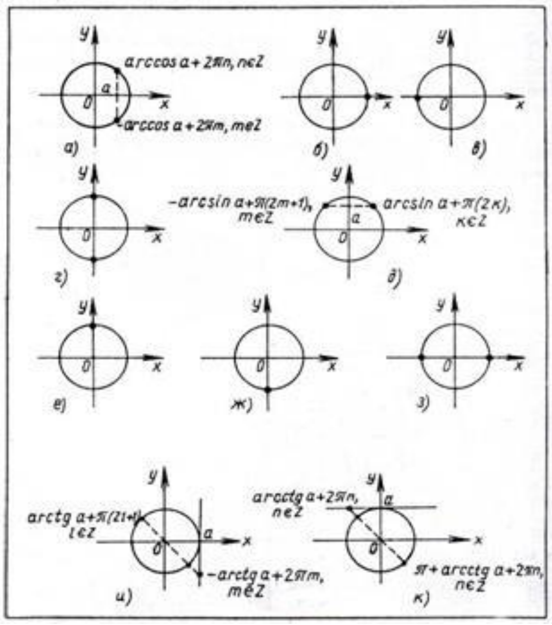

Рис.1.

Уравнение вида sin x = a

Если $a > 1$, то x ∈ Q

Если $a \leq 1$, то x = $-1 \ ^{n} \ arccos\ a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, то (рис.1,д)

Особые случаи:

$sinx = 1;\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$sinx = -1;\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z$

$sinx = 0;\ x = \pi m, m \in Z$ (Рисунок 1, з)

Нужно помнить, что при $\alpha \in \ -1; 1 \ -\frac{\pi}{2} \leq arccos\alpha \leq \frac{\pi}{2}$;

$arcsin \ -\alpha \ = -arcsin\alpha$;

$arccos\alpha + arcsin\alpha = \frac{\pi}{2}$;.

Уравнение вида $cosx = \alpha$.

Если $\alpha > 1$, то $x \in Q$

Если $\alpha \leq 1$, то $x = \pm arccos\alpha + 2\pi k, k \in Z$ (Рисунок 1, а)

Особые случаи:

$cosx = 1;\ x = 2\pi k, k \in Z$ (Рисунок 1, б)

$cosx = -1; x = \pi + 2\pi k, k \in Z$ (Рисунок 1, в)

$cosx = 0; x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ (Рисунок 1, г)

Любая из этих формул может быть заменена формулой общего вида, однако они проще и их выгоднее применять при решении уравнений.

Полезно помнить, что при $\alpha \in \ -1; 1\ $, $0 \leq arccos\alpha \leq \pi$; $\arccos\ -\alpha\ = \pi - arccos\alpha$; $\cos\ arccos\alpha\ = \alpha$.

Уравнение вида $tgx = \alpha$.

$x = arctg + \pi n, n \in Z$ (Рисунок 1, и)

Нужно помнить, что при $\alpha \in\ -1; 1\ \ -\frac{\pi}{2} < arctg < \frac{\pi}{2}$;

$arctg\ -\alpha\ = -arctg\alpha$;

$tg\ arctg\alpha\ = \alpha$.

Уравнение вида $ctgx = \alpha$.

$x = arctg\alpha + \pi n, n \in Z$ (Рисунок 1, к)

Нужно помнить, что при $\alpha \in\ -1; 1\ \ 0 < arcctg\alpha < \pi$;

$arcctg\ -\alpha\ = \pi - arcctg\alpha$;

$ctg\ arcctg\alpha\ = \alpha$.

Уравнения, сводящиеся к простейшим, имеют вид $sinf\ x\ = \alpha, cosf\ x\ = \alpha, tgf\ x\ = \alpha, ctgf\ x\ = \alpha$.

Данные уравнения также являются простейшими и решаются сначала относительно f(x), а затем полученные уравнения решаются относительно x.

Примеры:

- $sin\, x/2 = 1/2 \to x/2 = (-1)\hat{}n\ \pi/6 + \pi n \to x = (-1)\hat{}n\ \pi/3 + 2\pi n, n \in Z$.
- $cos(x + \pi/3) = 1 \to x + \pi/3 = 2\pi k, k \in Z \to x = -\pi/3 + 2\pi k, k \in Z$.
- $tg(2x - \pi/4) = \sqrt{3}/3 \to 2x - \pi/4 = \pi/6 + \pi n \to 2x = 5\pi/12 + \pi n \to x = 5\pi/24 + \pi n/2, n \in Z$.

2)Уравнения, сводимые к алгебраическим.

Это уравнения, сводимые к одной и той же функции, относительно одного и того же неизвестного выражения, входящего только под знак функции.

Тригонометрические уравнения

$a\,sin^2x + b\ sin\,x + c = 0,$

$a\,cos^3x + b\ cos\,x + c = 0\,,$

$a\,tg^4x + b\ tg^{\,3}3\,x + c = 0$

уже сведены к алгебраическим. На самом деле, представив соответственно

$sin\,\mathrm{x} = \mathrm{y},$

$cos\,\mathrm{x} = z,$

$tg\,3x = t,$

$ctg\,2x = u,$ получим следующие алгебраические уравнения:

$ay^2 + by + c = 0\,,$

$az^3 + bz + c = 0\,,$

$at^4 + bt^2 + c = 0\,,$

$au^2 + bu + c = 0$

Решим каждое из них и найдем $sin\,\mathrm{x},\ cos\,\mathrm{x}, tg\,3x,\ ctg\,2x.$

Уравнения

$a\,sin^2x + b\ cos\,x + c = 0,$

$a\,cos^2x + b\ sin\,x + c = 0\,,$

$a\,tg\,x + b\ ctg\,x + c = 0$ не являются по виду алгебраическими, но их можно свести к таковым

$a\,cos^2x - b\ cos\,x - (a + c) = 0,$

$a\,sin^2x - b\ sin\,x - (a + c) = 0.$

Рассмотрим на примере решение тригонометрических уравнений представленного выше типа. Воспользуемся при решением способом замены переменной.

Пример 1.

$2sin^2x - 7cosx - 5 = 0$

$2\ \ 1-cos^2x\ \ -7cosx-5=0$

$2-2cos^2x-7cosx-5=0$

$2cos^2x+7cosx+3=0$

Замена – пусть $cosx=y$, тогда

$2y^2+7y+3=0$

$D=b^2-4ac.\ D=49-24=25.\ \ \sqrt{D}=5$

$y_{1.2}=\frac{-b\pm\ \sqrt{D}}{2a}$

$y_1=\frac{1}{2}.\ y_2=\ -3$

Подставим корни уравнения в замену:

$cosx=-3<-1$ – не является решением заданного уравнения. $x=\emptyset$

$cosx=-\frac{1}{2}.\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k.\ k\in Z$ – решение уравнения.

Пример 2.

$cos2x+3\ sinx=2$

$1-2sin^2x-3sinx=2$

$2sin^2x-3sinx+1=0$

Замена – пусть $sinx=y$

$2y^2-3y+1=0$

$D=b^2-4ac.\ D=9-8=1.\ \ \sqrt{D}=1$

$y_{1.2}=\frac{-b\pm\ \sqrt{D}}{2a}$

$y_1=\frac{1}{2}.\ y_2=\ 1$

Подставим корни уравнения в замену:

$sinx=1.\ x=\ \frac{\pi}{2}+2\pi k.\ k\in Z$ – решение уравнения.

$sinx=-\frac{1}{2}.\ x=\ \ -1\ \ ^{n}*\frac{\pi}{6}+2\pi n.\ n\in Z$ – решение уравнения.

В процессе рассмотрения примеров данного типа тригонометрических уравнений, легко убедиться, что в них нет ничего сложного. Однако, чтобы без труда справиться и безошибочно решить уравнения, необходимо знать помнить следующие формулы:

$sin^2x + cos^2x$=1

$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$

$ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$

$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$

1+$tg^2\alpha$=$\frac{1}{cos^2\alpha}$

1+$ctg^2\alpha$=$\frac{1}{sin^2\alpha}$

$1 + cos2\alpha = 2cos^2\alpha$

$1 - cos2\alpha = 2sin^2\alpha$

$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

$sin2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha}$

$sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha$

$cos2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + \alpha}$

$cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$

Формулы целесообразно запоминать сразу группам, а не по одной, стараясь выявить сходства и различия между формулами из разных групп. Также полезно запоминать вывод формулы – преобразования, применяемы на пути к той или иной формуле, а также ее связь с другими формулами [2].

Важно доказать ученикам, насколько важно твердо знать формулы и умело пользоваться ими в различных ситуациях. Для большего запоминания на начальной стадии изучения формулы, можно словесно воспроизводить формулировки, переходя от образной информации к вербальной и наоборот.

3)Однородные уравнения

Уравнения

a $sinx + b\ cos$x $= 0$

$a\ sin^2x + b\ sin\,x \cos x + c\ cos^2x = 0$

$a\ sin^3x + b\ sin^2x\ cosx + c\ sin\,x\,cos^2x + dcos^3x = 0$

называются однородными относительно функций $sinx$ и cos x. Сумма показателей при $sin\,x$ и cos x у всех членов этих уравнений одинакова. Такую сумму будем называть степенью однородного уравнения.

Уравнения, рассмотренные выше, содержат первую, вторую и третью степени. Делением на $cos^k x$, где k степень однородного уравнения, уравнение приводится к алгебраическому виду, относительно функции tgx. Рассмотрим уравнение $a\,sin^2 x\ +\ b\,sin\,x\cos x +\ c\,cos^2 x\ \ =\ 0$ (l). Разделим это уравнение на $cos^2 x$, получим: $a\,tg^2 x\ +\ b\ tg\,x\ +\ c\ =\ 0$ (2). При а $\neq$ 0(1) и (2) являются равносильными, так как cos x $\neq\ 0$. В том случае, когда cos x $= 0$. то из уравнения (1) видно, что и sin x $= 0$, что невозможно, так как теряет смысл тождество $sin^2 x\ +\ cos^2 x$ = 1 (sin x и cos x при одном и том же значении x в нуль не обращаются).

Из уравнения (2) определим значения tg x , после находим соответствующие значения x. Очевидно, что при $b^2 - 4ac < 0$ значения tg x не существуют на множестве R, а потому уравнение (2), а значит, и уравнение (1) решений не имеют уравнение.

Уравнение $a\,sin^2 x\ +\ b\,sin\,x\cos x +\ c\,cos^2 x\ = d$(3) в таком виде не является однородным, но его можно привести к однородному умножив его правую часть на $sin^2 x\ +\ cos^2 x\ =\ 1$: $a\,sin^2 x\ +\ b\,sin\,x\cos x +\ c\,cos^2 x =$ $d\ \ sin^2 x\ +\ cos^2 x$ т.е $a\,sin^2 x\ +\ b\,sin\,x\cos x +\ c\,cos^2 x =\ d\,sin^2 x +$ $dcos^2 x$ или $(a\ -\ d)\,tg^2 x\ +\ b\,tgx\ +\ (c\ -\ d)\ =\ 0$. (4) При $a\ \neq\ d$ уравнения (3) и (4) равносильны. Из уравнения (4) находим tgx, а затем соответствующие значения x.

Пример1.

$2sinx - 3cosx = 0. cosx \neq 0$

Чтобы решить уравнение такого типа, нам необходимо разделить обе части уравнения на $cosx$

$2tgx - 3 = 0$

$$tgx = \frac{3}{2}$$

$x = arctg\frac{3}{2} + \pi$, n$\in Z$

Пример 2.

$sin2x + cos2x = 0, cos2x \neq 0$

Разделим данное уравнение на $cos2x$

$tg2x + 1 = 0$

$tg2x = -1$

$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n\,, 2x = (4n-1)\frac{\pi}{4}$

$x = (4n-1)\frac{\pi}{8}$

Пример3.

$cos^2x + sinxcosx = 0$

В условии не указано, что $cosx \neq 0$, поэтому делить уравнение на cos^2x нельзя. Мы можем утверждать, что $sinx \neq 0$, так как в обратном случае $cosx = 0$. Это невозможно одновременно. Для решения данного уравнения и ему подобных, разделим его на sin^2x

$ctg^2x + ctgx = 0$

Вынесем общий множитель за скобки

$ctgx\,(ctgx + 1) = 0$

$ctgx = 0\;\; x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

$ctgx = -1,\;\; x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

4)Уравнения вида $\alpha sinx + bcosx = c, (a, b, c \neq 0)$

Один из способов решения уравнений такого типа заключается в следующем:

Левую часть уравнения преобразуем по формулам:

$acosx + bsinx = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$, где $cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Пример1.

$\sqrt{3}cosx + sinx = 2$

$a = \sqrt{3}, b = 1$

$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2.$

$\varphi = \frac{\pi}{6}$, так как является решением системы $\begin{cases} cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\varphi = \frac{1}{2} \end{cases}$

Подставим полученные результаты в исходную формулу

$2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\pi n, n \in Z \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$

Пример2.

$5cosx + 12sinx = 13$

$a = 5, b = 12$

$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{5^2+13^2} = \sqrt{169} = 13.$

$\varphi = arctg\frac{12}{5}$, так как является решением системы $\begin{cases} cos\varphi = \frac{5}{13} \\ sin\varphi = \frac{12}{13} \end{cases}$

Подставим полученные результаты в исходную формулу

$\cos\left(x - arctg\frac{12}{5}\right) = 1 \rightarrow x = arctg\frac{12}{5} + 2\pi n, n \in Z.$

В некоторых учебных пособиях формула $\alpha sinx + bcosx = c$, выглядит так $acosx + bsinx = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x - \varphi)$, где $tg\varphi = \frac{b}{a}$.

Решение тригонометрического уравнения, таким образом, приведет к ошибке, так как a и b могут быть отрицательными. Для того, чтобы избежать ошибки, учителю необходимо тщательно рассматривать каждый вид тригонометрических уравнений [2].

5)Уравнения, решаемые разложением на множители

При решении уравнений данного типа необходимо пользоваться различными известными способами разложения на множители алгебраических выражений. Это операции такого типа, как вынесение за скобки общего множителя, группировка, применение формул сокращенного умножения и деления, а также искусственные приемы. Также нужно знать формулы уравнений, сводимых к алгебраическим, и следующие формулы:

$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tan\,\alpha \pm tan\ \beta}{1 \mp tan\beta tan\alpha}$

$sin3\alpha\ =\ 3sin\alpha - 4\,sin^3\alpha$

$cos3\alpha\ =\ 4\,cos^3\alpha - 3cos\alpha$

Пример 1.

$sin\,2\text{x} — \ sin\,x\ =\ 0$

Используя формулу синуса двойного аргумента, запишем уравнение в виде:

$2\,sin\,x\cos x — \ sin\,x\ =\ 0$

Вынесем общий множитель за скобки

$sin\,x\,(2\cos x\ -\ 1)\ =\ 0$

$sin\,x\ =\ 0,\ \text{x}\ =\ \pi n, n \in Z$

$2cos\ -\ 1 = 0,\ \cos\text{x}\ =\ \dfrac{1}{2},\ x\ =\ \pm\ \dfrac{\pi}{3} +\ 2\pi n,\ n \in Z$

Пример2.

$sin\,7x\ +\ sin\,3x\ =\ 3\,cos2x$

Применив формулу суммы синусов, запишем в виде

$2\,sin\,5x\ \cdot\ cos\,2x\ =\ 3cos\,2x$ или $2\,sin\,5x\ \cdot\ cos\,2x\ -\ 3cos\,2x\ =\ 0$

Отсюда $\cos 2x\ (sin5x\ - \frac{3}{2})\ =\ 0$

$\cos 2x\ =\ 0\ ,\ x\ =\ \ \pi/4 + \pi n/2,\ n \in Z$

$sin\,5x\ = 3/2$ корней не имеет, $x\ =\ \emptyset$

6)*Уравнения, решаемые с помощью формул сложения тригонометрических функций.*

Уравнения, решающиеся данным способом, подразумевает под собой знание следующих формул.

$sin\alpha + sin\beta = 2sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$sin\alpha - sin\beta = 2sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$cos\alpha + cos\beta = 2cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$$cos\alpha - cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$cos\alpha - cos\beta = -2sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$tg\alpha \pm tg\beta = \frac{sin(\alpha \pm \beta)}{cos\alpha * cos\beta}$$

$$ctg\alpha + ctg\beta = \frac{sin(\alpha+\beta)}{sin\alpha * sin\beta}$$

$$ctg\alpha - ctg\beta = \frac{sin(\beta-\alpha)}{sin\alpha * sin\beta}$$

В каких-то случаях необходимо будет применять формулы следующего типа

$$sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha cos\beta \pm cos\alpha cos\beta$$

$$cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha cos\beta \pm sin\alpha sin\beta$$

Пример:

$$sin5x + sinx = 0$$

Преобразуем сумму синусов в их произведение.

$$sin5x + sinx = 2sin3x * cos2x = 0$$

Отсюда, либо

$$sin3x = 0,$$

Откуда находим

$$3x = \pi n$$

$$x = \frac{\pi n}{3}, n \in Z$$

Либо рассматриваем второй вариант

$$cos2x = 0$$

Откуда находим

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$$

Также существуют типы решений тригонометрических уравнений, такого вида:

- Уравнения, решаемые с помощью условий равенства одноименных тригонометрических функций
- Уравнения, решаемые с помощью формул сложения углов и разложения произведения тригонометрических функций в сумму
- Уравнения, решаемые с помощью формул понижения степени
- Уравнения вида $\alpha sinx + bcosx = c$
- Уравнения смешанного типа

В этих типах уравнений мы рассмотрим лишь примеры, так как они встречаются реже представленных выше [25].

2.2 Виды тригонометрических неравенств и методы их решений

Тригонометрические выражения, которые соединены между собой знаками $" > "$ или $" < "$ являются тригонометрическими неравенствами. Неравенства, называемые тригонометрическими, могут быть как тождественными, иными словами безусловными, так и условными [21].

Тождественные неравенства мы должны доказать, а условные – решить. Тригонометрическое неравенство является тождественным, если оно будет справедливо при любых допустимых значениях неизвестных, которые входят в заданное неравенство. К примеру:

1. $tg^2x \geq 0$ при $\forall\ x \in R$, кроме $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, n$\in Z$

2. $sinx \ \ \leq 1$ при всех $x \in R$

3. $\frac{sinx+cosx}{2} \geq \ \ \overline{sinxcosx}\,, x \in \ \ 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \ \ $, n ∈ Z

Тригонометрическое неравенство является условным в том случае, когда оно справедливо не при всяком значении неизвестных, в него входящих. К примеру:

1. $sinx \geq \frac{1}{2}$, выполняется только на отрезках $[\pi/6 + 2\pi k; 5\pi/6 + 2\pi k], k \in Z$

2. $cosx \leq 0$, выполняется только на отрезках $[\pi/6 + 2\pi n; 3\pi/6 + 2\pi n], n \in Z$

3.$ctgx < - \overline{3}$, выполняется в интервале $(- \pi/6 + \pi k; \pi k), k \in Z$

Решить тригонометрическое неравенство – значит найти какое-то множество неизвестных значений, которые в него входят, или при которых будет выполняться данное неравенство.

При решении данных неравенств нам необходимо помнить, что тригонометрические функции $sin\, x$ и $cos\, x$ имеют наименьший положительный период 2π, а$tg\, x$ и $ctgx$ имеют наименьший положительный период π. В ходе решения неравенств с тригонометрическими функциями необходимо обязательно использовать периодичность заданных функций, а также их монотонность на промежутках [18].

Чтобы решить неравенство, которое содержит только $sin\, x$ или $cos\, x$, нам достаточно просто решить неравенство на любом отрезке 2π. Для получения множества всех решений, прибавим к каждому найденному на этом промежутке корню, числа вида $2\pi n$. Что касаемо неравенств, содержащих $tg\, x$ и $ctgx$, их решения будут находиться на промежутке длиной πn.

Также тригонометрические неравенства можно решить с помощью графиков функций $y = sin\, x, y = cosx, y = tgx, y = ctgx$. Также будем прибегать к помощи единичной окружности

2.3 Использование единичной окружности при изучении школьного курса тригонометрии

Числовая (или координатная) окружность весьма стремительно применяется в изучении тригонометрии, так как с ее помощью легче показывать множества чисел, объединенных по конкретным свойствам [2].

Полный курс тригонометрии был основан на четырех основных тригонометрических функциях: $sin\ x$, $cos\ x$,$tg\ x$,ctg. Проанализируем, как геометрически можно определить данные функции.

В тригонометрии мы часто сталкиваемся с углами поворота. Они, в свою очередь, связаны с вращением по окружности. Величины углов поворота не зависят от радиуса окружности, по которой совершается вращение, именно поэтому удобно работать непосредственно с окружностью единичного радиуса, это позволяет нам избавляться от коэффициентов при математическом описании. Это и объясняет тот факт, что используется единичная окружность [7].

Пусть дана декартова система координат на плоскости, и построена окружность с радиусом R и центром в начале координат O. Любой угол можно рассматривать, как поворот от положительного направления оси абсцисс до некоторого луча OB, при этом направление поворота против часовой стрелки считается положительным, а по часовой стрелке — отрицательным. На рисунке 2 абсциссу точки B обозначим x_b, ординату обозначим y_b

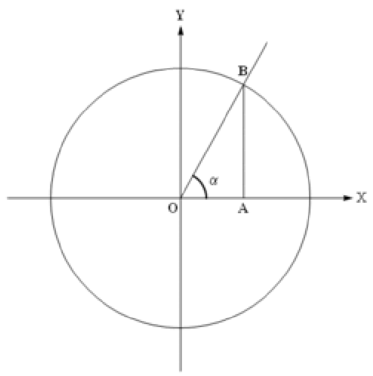

Рис.2. - Обозначение координат точки B.

В тригонометрии определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса дается через координаты точек на единичной окружности. При использовании данных определений мы имеем возможность обосновать свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

- Синусом называется отношение $sin\alpha = \frac{y_b}{R}$

- Косинусом называется отношение $cos\alpha = \frac{x_b}{R}$
- Тангенс определяется как $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{y_b}{x_b}$
- Котангенс определяется как $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha} = \frac{x_b}{y_b}$

Единичная окружность задается уравнением вида $x^2 + y^2 = 1$. Это уравнение, вместе с определениями синуса и косинуса, позволяют записать основное тригонометрическое тождество: $sin^2x + cos^2x = 1$. Применение единичной окружности ко всему прочему позволяет доказать основные формулы тригонометрии.

Отображение числового множества R на координатную окружность наглядно можно представить на рисунке 2, как «наматывание» координатной прямой на координатную окружность: положительный луч координатной прямой – в положительном направлении, отрицательный луч – в отрицательном направлении [17].

Отметим на рисунке 3, что отображение числового множества R на координатную окружность не является взаимно однозначным, так как каждая точка на окружности изображает бесконечное множество действительных чисел, а каждому действительному числу будет соответствовать действительная точка на заданной окружности.

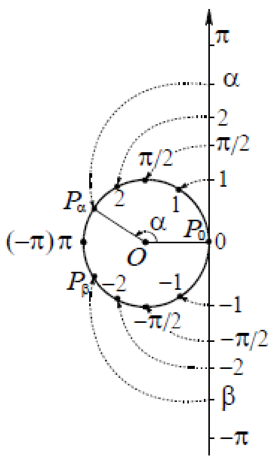

Рис.3. – Отображение числового множества R.

Значение sin(x), cos(x), tg(x), ctg(x) для некоторых углов.

Приведем значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для наиболее используемых углов в таблице 1 (знак бесконечности ∞ значит, что функция в указанной точке не определена, а в её окрестности стремится к бесконечности).

α	0°	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$	180° π	270° $\frac{3\pi}{2}$	360° 2π
$sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\overline{2}}{2}$	$\frac{\overline{3}}{2}$	1	0	-1	0
$cos\alpha$	1	$\frac{\overline{3}}{2}$	$\frac{\overline{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\overline{3}}$	1	$\overline{3}$	-	0	-	0
$ctg\alpha$	-	$\overline{3}$	1	$\frac{1}{\overline{3}}$	0	-	0	-

Таблица 1 – значения тригонометрических функций

Решение простейших тригонометрических неравенств, с помощью геометрических иллюстраций.

Все числа вида $\alpha + 2\pi n$, $n \epsilon Z$ соответствуют единственной точке числовой окружности $P\alpha$, так как при обходе окружности в положительном или отрицательном направлении на целое число оборотов из данной точки P_{α} приходим в эту же точку.

Уравнения вида sin x=a

Числа вида $\alpha + 2\pi n$ или $-\alpha + \pi + 2\pi n, n \epsilon Z$ на числовой окружности изображаются точкой P_{α} или $P_{-\alpha+\pi}$ соответственно. Данные точки располагаются на окружности симметрично относительно оси y . Эти два множества чисел можно записать в виде $(-1)n\alpha + \pi n, n \epsilon Z$

Пример 1. Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения $sinx = \frac{\overline{2}}{2}$.

Решение: Запишем решения данного уравнения x=π/4+2πn или x=3π/4+$2\pi n,\ n\epsilon Z$.

На рисунке 4, наблюдаем две точки на окружности $P_{\pi/4}$ и $P_{3\pi/4}$, которые изображают решение этого уравнения, симметрично относительно оси координат.

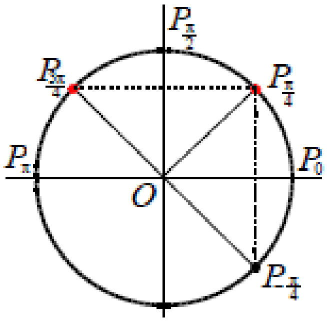

Рис.4. – Геометрическое решение уравнения $sinx\ =\ \frac{\overline{2}}{2}$.

Уравнения вида cos x = a

Числа вида $\alpha + 2\pi n$ или – $\alpha + 2\pi n, n\ \epsilon\ Z$, изображаются точкой P_{α} или $P_{-\alpha}$ на числовой окружности соответственно. Точки симметрично располагаются на числовой окружности относительно оси x . Эти два множества чисел запишем в виде $\pm\alpha + 2\pi n, n\ \epsilon\ Z$.

Пример 2. Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения $cosx = \frac{\overline{3}}{2}$.

Решение: Запишем решения данного уравнения $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n\epsilon Z$. На рисунке 5 изображены две точки на окружности $P_{\cdot\pi/6}$ и

$P_{\cdot-\pi/6}$, которые изображают решение заданного уравнения, располагаются симметрично относительно оси абсцисс.

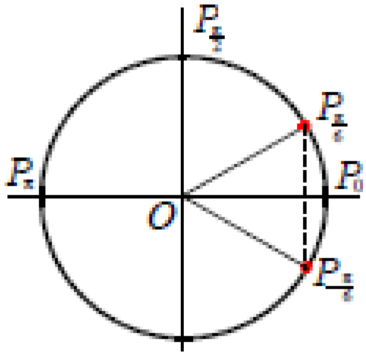

Рис.5. - решение уравнения $cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Уравнения вида tg x = a или ctg x = a

Числа вида $\alpha + 2\pi n$ или $\alpha + \pi + 2\pi n, n \epsilon Z$, на числовой окружности изображаются точками P_{α} или $P_{\alpha+\pi}$. Точки расположены на окружности симметрично относительно начала координат. Эти множества чисел записываются в виде $\alpha+\pi n$, $n \in Z$.

Пример 3. Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения $tgx = \sqrt{3}$.

Решение: Запишем решения данного уравнения $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ или $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\ n\epsilon Z$. Две точки на окружности $P_{\pi/3}$ и $P_{4\pi/3}$, изображающие решение этого уравнения, расположены симметрично относительно начала координат на рисунке 6.

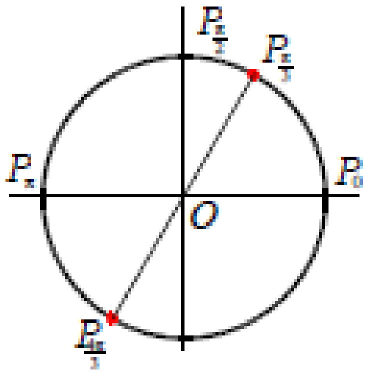

Рис.6. – геометрическое решение уравнения $tgx = \sqrt{3}$.

Пример 4. Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения $ctg\ x = \sqrt{3}$.

Решение: Решение уравнения $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$. Точки окружности $P_{\pi/6}$ и $P_{7\pi/6}$, изображающие решения этого уравнения, расположены симметрично относительно начала координат на рисунке 7.

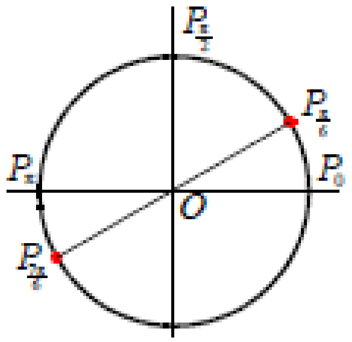

Рис.7. – Геометрическое решение уравнения $ctgx = \sqrt{3}$.

Подобным способом, в процессе изучения тригонометрического материала нужно научиться выполнять следующие наборы упражнений:

1. При первичном изучении тригонометрии необходимо самостоятельно заполнить таблицу значений тригонометрических функций для углов 30°, 45°, 60° и 90°и выучить.

2. При введении понятия тригонометрической окружности:

- Отметить точки, соответствующие поворотам радиуса на 30°, 45°, 60°, затем на $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}$.
- Записать значения углов для вышеуказанных точек с учетом периода движения по окружности.
- Записать значения углов для вышеуказанных точек с учетом периода движения по окружности при заданных значениях параметра (например, при $n = 2$; $n = -1$; $n = -5$).
- Найти при помощи тригонометрической окружности значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для вышеуказанных углов.
- На окружности отметить точки, которые соответствуют требуемым значениям тригонометрических функций.
- Найти и записать числовые промежутки, удовлетворяющие заданным ограничениям значения функции.

- Самостоятельно подобрать формулу для записи углов, соответствующих нескольким точкам на тригонометрической окружности (к примеру, объединить записи $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$ и $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z$.) [19].

3. При изучении тригонометрических функций, их свойств и графиков:

- Отметить на графике функции точки, соответствующие указанным выше углам как значениям аргументов.
- При заданном значении функции (например, $ctgx = 1$) отметить как можно больше точек на графике функции и записать соответствующие значения аргумента.
- Отметить как можно больше точек, соответствующих данным значениям функции (например, $|sin\,x\,| = 1/2$).
- Отметить промежутки, соответствующие заданным ограничениям на значения функции (к примеру, $-\frac{\overline{3}}{2} \leq cosx \leq \frac{1}{2}$).
- При заданных значениях функции и ограничениях на значения аргумента отметить соответствующие точки и записать значения аргумента (к примеру, указать на графике и сделать соответствующие записи для точек, удовлетворяющих условиям $tgx = \sqrt{3}$ и $-3\pi < x < 5\pi/2$) [19].

Перечисленные выше действия могут оказаться полезными при решении задачи С1, входящей в структуру ЕГЭ по математике. В этой задаче помимо решения тригонометрического уравнения требуется произвести отбор корней. Заметим сначала, что для эффективного выполнения задания на экзамене кроме упомянутых выше знаний и умений ученик должен обладать соответствующими навыками:

- решать простейшие тригонометрические уравнения и неравенства;
- применять тригонометрические тождества;
- использовать различные методы решения уравнений;
- решать двойные линейные неравенства;
- оценивать значение иррационального числа [2].

ГЛАВА III МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА НА ТЕМУ "РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ В 10 КЛАССЕ"

При разработке элективного курса, в первую очередь, необходимо провести исследование, насколько ученики ориентируются в рассматриваемой теме. Для того чтобы это проверить, была проведена массовая проверочная работа для учащихся 10 класса МБОУ СОШ 15 города Губкина. Задания проверочной работы и результаты исследования приведены ниже.

1. Констатирующий эксперимент

Цель: выявление уровня знаний учащихся в разделе тригонометрия

В ходе эксперимента будет проведена массовая проверочная работа, нацеленная на получение общей картины уровня знаний учащихся по разделам тригонометрические уравнения и неравенства.

В самом начале эксперимента, присутствуя на уроке, посвященному решению тригонометрических уравнений и неравенств, были выявлены основные пробелы учащихся, такие как: незнание формул, непонимание алгоритма действий, неумение пользоваться единичной окружностью, невнимательность.

Ниже представлена проверочная работа для учащихся 10 класса. Работа рассчитана на 45 минут. В работе приняли участие 19 человек.

1	$sinx = 0$
2	$cosx = 1$
3	$3tg2x = \sqrt{3}$
4	$2sin\,x/3 = -1$
5	$2sin^2x + 5cosx = 4$
6	$3 - 3cosx = 2sin^2x$

В результате данного небольшого исследования, мы получили следующие результаты:

- 8 человек не справились ни с одним заданием (42%)
- 3 человека выполнили 1 задание (15%)
- 4 человека выполнили 2 задания (21%)
- 3 человека выполнили 3 задания (15%)
- 1 человек выполнил 4 задания (5%)
- ни один ученик не выполнил все предоставленные задания

Всего в исследовании приняли участие 19 человек.

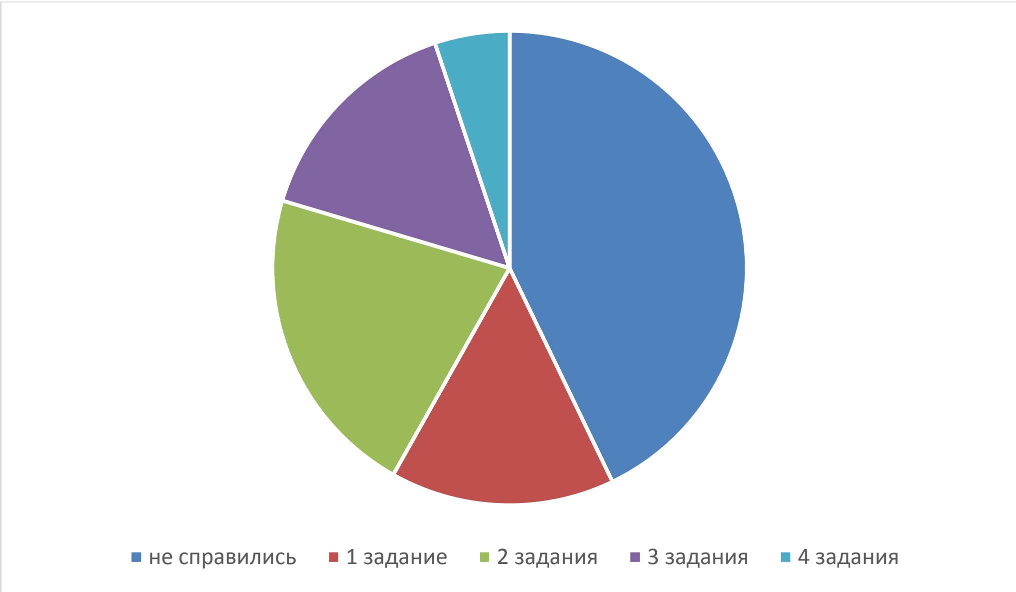

Рис.8. – Результаты первичного исследования уровня знаний

2. Формирующий эксперимент

Формирующий эксперимент проводился с 10 классом на протяжении двух недель, уделяя каждой необходимой теме по 10-15 минут урока геометрии. В процессе были повторены основные необходимые тригонометрические формулы, методы решения различных типов заданий, а также широко рассмотрено использование единичной окружности при решении тригонометрических уравнений и неравенств.

Также, исходя из результатов исследования, мною был предложен элективный курс на тему "Решение тригонометрических уравнений и неравенств в 10 классе", с целью повышения успеваемости в разделе тригонометрия.

В качестве основы, а также дидактических принципов, в современной педагогике выделяют представленные ниже аспекты, используемые при разработке элективного курса:

- Сознательности
- Активности
- Наглядности
- Систематичности
- Последовательности
- Доступности
- Связи теории и практики

При обучении учащихся теме «тригонометрические уравнения и неравенства» в первую очередь необходимо обратить внимание на такие принципы, как наглядность, доступность, систематичность.

Рассмотрим каждый аспект наиболее полно

Принцип наглядности – наиболее понятный принцип обучения, им начали пользоваться еще с самых древних времен. Однако развитое обоснование концепции данного принципа получено не так давно. В его основе находятся различные закономерности органов чувств человека. К примеру, органы зрения обладают наибольшей раздражительностью и чувствительностью к внешним факторам. Проще говоря, нам намного легче запоминать информацию, глядя на нее, запоминая, таким образом, в 5 раз больше, чем используя лишь только органы слуха. Информация, полученная нами с помощью зрения, не требует какого-либо перекодирования, она легко остается в памяти, усваивается очень прочно и быстро.

Изучение курса тригонометрии предполагает под собой участие наглядного принципа обучения, так как использованию единичной окружности, а также построению графиков тригонометрических функций способствуют органы зрения.

Следует помнить, что наглядность необходимо использовать не только при иллюстрации новой темы, но и при задании самостоятельной работы. Учащиеся могут самостоятельно искать источник новых знаний, и организовать свою поисковую и исследовательскую работу.

Наглядные пособия способствуют образованию наиболее отчетливых и правильных представлений об изучаемых предметах и явлениях.

Далее рассмотрим следующий принцип под названием систематичность. Он также играет одну из наиболее важных ролей при изучении данной темы.

При изучении любой информации, будет наиболее быстрый и правильный результат, если между ее изучением будет проходить небольшое количество времени, перерывов. Если делать большой перерыв, то навыки постепенно утратятся, и учащиеся будут постепенно сталкиваться с затруднениями. Чтобы процесс обучения данной теме не замедлялся, принцип систематичности и последовательности просто необходим.

Следующим аспектом правильного обучения является принцип доступности. Он возникает из возрастных особенностей учащихся, а также из организации дидактического процесса. В основе представленного принципа лежат следующие факторы:

- Доступность обучения целиком и полностью связана с возрастными особенностями школьников и зависит от индивидуальных способностей каждого.
- Доступность обучения также зависит от выбора методики обучения и организации учебного процесса.

При организации процесса обучения данной теме, очень важно придерживаться установлению связей между тригонометрией и остальными науками. В процессе обучения необходимо находить взаимосвязь между единством преподавания и обучения. Именно в том случае, когда два этих процесса взаимосвязаны, процесс обучения достигнет запланированного результата.

Нельзя рассчитывать на хороший результат, если при всем желании преподавателя донести информацию, ученик ее не воспринимает, не участвует в обсуждениях и не проявляет инициативу. В таком случае можно сказать, что возникли проблемы с обратной связью. Как бы учитель не старался, на выходе получит ученика без минимального набора знаний. Отсюда можно сделать вывод, что активность с обеих сторон имеет колоссальное значение.

Суть принципа активности – осознание масштабов, целей и задач предстоящей работы. В самом деле, если школьнику не донесли смысл того, чем ему предстоит заниматься, активность будет сведена к нулю, следовательно, и смысл всей работы будет утерян. Обучать нужно так, чтобы школьник понимал, что, зачем и каким образом нужно делать. Использовать все виды и формы познавательной деятельности, находить аналогию и сопоставлять с противопоставлением. Важно обеспечивать понимание каждого слова, понятия и определения. Только в этом случае тема будет хорошо усвоена и принята.

Воспитание активности тоже очень важно в процессе обучения. Активные ученики обычно задают незначительные вопросы лишь для того, чтобы наиболее полно разобраться в материале. Слабоактивные, скорее всего, промолчат, чтобы не привлекать внимание учителя лишний раз.

В процессе работы над новой темой необходимо логично связывать неизвестное с известным, а также подкреплять примерами каждое правило, учить разделять главное и второстепенное.

Пояснительная записка

Программа элективного курса по математике " Решение тригонометрических уравнений и неравенств в 10 классе " была составлена на основе программы 10 класса по алгебре и началам анализа в соответствии с требованиями ФГОС. Программа разработана для учеников 10 классов с целью прочного овладения материалом по теме тригонометрических уравнений и неравенств, а также создание условий для более углубленного изучения алгебры, а именно заданной нами темы. Элективный курс рассчитан на 1 час в неделю. Всего курс займет 17 часов и рекомендован для изучения во второй половине 10 класса.

Элективный курс обладает отличительной особенностью – имеет прикладное общеразвивающее значение, необходим для развития логического мышления учащихся, углубления и систематизации знаний по тригонометрии. Программа элективного курса рассчитана на ликвидацию пробелов в знаниях и сориентировать учащихся на успешную подготовку к ЕГЭ в разделе тригонометрия.

Элективный курс будет содержать различные вопросы тригонометрии, а также весьма распространенные методы решения тригонометрических заданий. Курс будет плотно примыкать к основному курсу алгебры 10 класса, поэтому поможем ученикам оптимально оценить собственный уровень знания данной дисциплины, и в случае не очень хорошего результата, подтянуть пробелы. Слушателями нашего курса могут быть учащиеся любого уровня подготовки.

Результатом представленной программы будет являться подведение итогов в форме аттестаций, практических и самостоятельных работ. Результаты будут фиксироваться, и в дальнейшем сравниваться. Исходя из этого, будут сделаны выводы о качестве проделанной работы каждого из учеников. В качестве дополнительных материалов будут предложены специализированные наборы уравнений и лучших методов их решения.

Образовательная область и предмет изучения

Математика во все века была составной частью культуры различных народов, являлась ключом к кладезю знаний, познанию окружающего мира, а также базой научно-технического прогресса. Математика в настоящее время наиболее полно проникает в современный уклад жизни, а школьное математическое образование содействует овладению определенными навыками, необходимыми для существования в ритме современного общества.

Изучение тригонометрических функций широко применяется на практике в ходе изучения различных физических процессов в промышленности и других сферах деятельности человека. Разработка элективного курса "Решение тригонометрических уравнений и неравенств в 10 классе" будет способствовать достижению цели большого количества учащихся – обеспечить себя высокой математической подготовкой перед сдачей ЕГЭ и поступлением в ВУЗ, так как содержит вопросы, не входящие в программу курса средней школы.

Актуальность и педагогическая целесообразность курса

На протяжении нескольких лет в школе возникли проблемы связанные с требованиями ЕГЭ и содержаниям школьного курса алгебры. Учителям необходимо хорошо подготовить детей к сдаче итоговой аттестации, путем получения навыков и умений решать определенные задания экзамена. Исходя из этого, зачастую пропускаются немаловажные темы, одной из них является решение тригонометрических уравнений и неравенств.

Данный элективный курс содержит все необходимое, чтобы подтянуть и углубить знания учащихся по дисциплине тригонометрия. Анализ сдачи единого государственного экзамена показал, что ученики допускают много ошибок при выполнении заданий именно этого раздела или вообще не берутся за такие задания. Данный элективный курс поможет школьникам как при решении заданий уровня С1 в ЕГЭ, так и при решении некоторых олимпиадных задач, предлагаемых в престижных вузах, что учитывается при поступлении в высшее учебное заведение.

Цели и задачи образовательной программы

Цели элективного курса:

Образовательные

1. Упорядочить знания по типам и методам решения тригонометрических уравнений и неравенств
2. Изучить нестандартные методы решения тригонометрических уравнений и неравенств
3. Расширить и углубить знания в вопросе исследования тригонометрических функций при помощи графиков
4. Обеспечить обобщение материала по изученной теме
5. Сформировать условия самоконтроля учащихся
6. Эффективно подготовить учащихся 10 классов по теме тригонометрические уравнения и неравенства

Развивающие

1. Сформировать умения применения приемов и методов сравнения, обобщения, вычленения главного
2. Развить, насколько это возможно мышление, память и речь учащихся
3. Расширить математический кругозор

Воспитательные

1. Воспитать интерес к математике, умению общаться и искать компромиссы в коллективе
2. Воспитать в каждом учащемся творческую личность, умеющую интегрироваться в системе математической культуры

Для достижения поставленных целей необходимо сформировать у учащихся целостного представления о теме, ее значении в математике, развить аналитическое мышление, память, расширить кругозор.

Умения и навыки, приобретенные по окончании курса

1. Умение самостоятельно работать с предложенным материалом, таким как таблицы и справочная литература
2. Формирование алгоритма решений различных тригонометрических уравнений и неравенств
3. Умение решать тригонометрические уравнения и неравенства

Структура курса

1. Уравнения
2. Тригонометрические формулы
3. Тригонометрические функции, а также их графики
4. Тригонометрические уравнения
5. Форма организации занятий

Основной формой проведения курса будут являться уроки-лекции, уроки - семинары, уроки-зачеты, уроки - практикумы, а также урок-подведение итогов. Основным типом занятий будет комбинированный урок. Каждая новая тема элективного курса будет начинаться с постановки задачи, затем мини-лекция, а после изучения теоретического материала будут предложены задания для закрепления изученного. Работа с карточками, тестами. Занятия элективного курса будут учитывать особенности каждого ребенка. Контроль осуществляется после каждого занятия, для более эффективной работы. В конце каждой темы учащиеся сдают письменный зачет.

В результате данного курса каждый учащийся должен знать тригонометрические формулы, алгоритм решения тригонометрических уравнений, уметь решать тригонометрические уравнения и неравенства.

Компетенции при изучении курса.

Познавательные.

1. Умение самостоятельно и мотивированно организовывать свою познавательную деятельность (от постановки цели до получения и оценки результата).
2. Участие в организации и проведении учебно-исследовательской работы. Самостоятельное создание алгоритмов познавательной деятельности для решения задач творческого и поискового характера.
3. Создание собственных текстов с использованием разнообразных средств.

Информационные.

1. Поиск нужной информации по заданной теме в источниках различного типа. Извлечение необходимой информации из текстов, таблиц, графиков.
2. Отделение основной информации от второстепенной.
3. Передача содержания информации адекватно поставленной цели (сжато, полно, выборочно).
4. Развернутое обоснование суждения, приведение обоснования (доказательства), примеров.

Коммуникативные.

1. Владение навыками организации и участия в коллективной деятельности; восприятие иных мнений, объективное определение своего вклада в общий результат.
2. Оценивание своего поведения в группе, выполнение требований в совместной практической деятельности.
3. Умение отстаивать свою точку зрения.
4. Развитие готовности к сотрудничеству.
5. Помощь учащимся с плохими коммуникативными навыками

Тематическое планирование

№ п/п	Тема	Кол-во часов	Форма занятий	Форма контроля
1	**Уравнения и неравенства**	1	Урок - лекция	тест
2	**Формулы тригонометрии**	4		зачет
	Градусная и радианная меры угла	1	Урок-семинар	практикум

	Основные формулы тригонометрии. Соотношение между тригонометрическими функциями одного и того же угла. Формулы приведения. Применение основных формул тригонометрии	1	Комбинированное	практикум
	Формулы сложения и следствия из них. Формулы двойного, тройного и половинного угла. Формулы суммы и разности тригонометрических функций.	2	Комбинированное	практикум
	Подведение итогов по пройденной теме.	1	Урок - зачет	зачет
3	**Тригонометрические функции и их графики**	4		зачет
	Область значений и область определения тригонометрических функций.	2	Комбинированное	практикум
	Построение графиков тригонометрических функций	2	Урок - практикум	практикум
	Подведение итогов по	1	Урок - зачет	зачет

	пройденной теме.			
4	**Тригонометрические уравнения и неравенства**	14		зачет
	Графический метод решения уравнений и неравенств	1	Урок - практикум	практикум
	Решение простейших тригонометрических уравнений	2	Урок - практикум	практикум
	Решение тригонометрических уравнений с помощью формул приведения	1	Комбинированное	практикум
	Решение однородных уравнений 1-й и 2-й степени	2	Урок - практикум	практикум
	Решение тригонометрических уравнений методом подстановки	2	Комбинированное	практикум
	Решение тригонометрических уравнений с применением формул сложения	2	Комбинированное	практикум
	Решение простейших тригонометрических неравенств	2	Урок - практикум	практикум

	Решение тригонометрических неравенств методом подстановки	2	Урок - практикум	практикум
	Подведение итогов по пройденной теме.	1	Урок – зачет	зачет
5	**Уравнения и неравенства с параметром**	5		
	Линейные уравнения с параметром. Решение линейных уравнений с параметром. Решение систем линейных уравнений с параметром	2	Комбинированное	практикум
	Линейные неравенства с параметром. Решение линейных неравенств с параметром. Решение систем линейных неравенств с параметром	2	Комбинированное	практикум
	Подведение итогов по пройденной теме.	1	Урок - зачет	зачет

Учебно-тематический план.

Тема 1. Уравнения. Неравенства.

Способы решения различных уравнений (линейных, квадратных и сводимых к ним, дробно-рациональных). Способы решения различных неравенств (числовых, линейных, квадратных). Метод интервалов. Область определения выражения.

Тема 2. Формулы тригонометрии. Формулы приведения, сложения, двойных углов и их применение. Применение основных тригонометрических формул к преобразованию выражений.

Рассмотрение всех необходимых тригонометрических формул. Изучить каждую формулу отдельно, подкрепляя различными примерами. В ходе изучения ликвидировать все вопросы, возникающие у учеников.

Тема 3. Тригонометрические функции и их графики.

Область определения и область значений тригонометрических функций. Четность и нечетность тригонометрических функций. Периодичность тригонометрических функций. Обобщить понятие тригонометрических функций; свойства функций и умение строить графики.

Тема 4. Тригонометрические уравнения и неравенства.

Сформировать умения решать как простейшие, так и повышенной сложности тригонометрические уравнения и неравенства; ознакомить с некоторыми приемами решения тригонометрических уравнений и неравенств.

Тема 5. Уравнения и неравенства с параметрами. Способы решения уравнений и неравенств с параметрами.

Список литературы

1. “Алгебра и начала анализа 10 – 11”. Автор А.Г.Мордкович. Москва “Мнемозина”, 2007 г.

2. “Геометрия 10–11”. Автор Л.С. Атанасян. Москва “Просвещение”, 2009 г.

3. Книга для учителя. Изучение геометрии в 10-11 классах. Авторы: С.М. Саакян, В.Ф. Бутузов. – М.: Просвещение, 2004.

4. Алгебра и начала анализа. Дидактические материалы для 10-11 классов. Авторы: М.И.Шабунин, М.В.Ткачева и другие. М: Мнемозина, 2006.

5. Алгебра и начала анализа 10-11 классы. Самостоятельные и контрольные работы. Авторы: А.П.Ершова, В.В.Голобородько. М: Илекса, 2005.

6. Изучение сложных тем курса алгебры в средней школе: Учебно-методические материалы по математике. – М.: Илекса, Ставрополь: Сервисшкола, 2006.

7. Колесникова С.И. Математика. Решение сложных задач Единого государственного экзамена. – М.: Айрис-пресс, 2005.

8. Тематические тесты. Математика. ЕГЭ-2011. 10-11 классы/ Под редакцией Ф.Ф. Лысенко. – Ростов-на-Дону: Легион, 2009.

Рассмотрим один из уроков элективного курса на тему "Решение простейших тригонометрических неравенств"

Технологическая карта урока

Тема урока: «Решение простейших тригонометрических неравенств».

Тип урока: урок открытия новых знаний.

Цель урока:

Образовательная: вывести определение неравенства, тригонометрического неравенства

Развивающая: развитие коммуникативной направленности, навыков самоконтроля и взаимоконтроля, математического и общего кругозора, мышления, речи, внимания, памяти, умения анализировать, сравнивать, обобщать;

Воспитательная: формирование положительной мотивации и интереса к математике, потребности в приобретении новых знаний; воспитание активности, умения общаться, сотрудничать и работать в команде, воспитание общей культуры.

Задачи урока: сформировать навыки работы с простейшими тригонометрическими неравенствами

Образовательные задачи урока (*формирование познавательных УУД*):

- Научиться ориентироваться в своей системе знаний: отличать новое от уже известного самостоятельно и с помощью учителя;
- Научиться добывать новые знания: находить ответы на вопросы, используя свой жизненный опыт и информацию, полученную на уроке;
- Научиться анализировать, сравнивать, обобщать, делать выводы;
- Научиться формулировать проблемы; создавать способы решения проблем;
- Научиться строить логическую цепочку рассуждений.

Воспитательные задачи урока (*формирование коммуникативных и личностных УУД*):

- Развивать умение точно и грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи;
- Развивать умение формулировать, аргументировать и отстаивать свое мнение;
- Развивать умение сотрудничать в группе, использовать в общении правила вежливости; находить общее решение.

Развивающие задачи урока: (*формирование регулятивных УУД*)

- развивать умение формулировать цель своей деятельности самостоятельно и с помощью учителя;
- развивать умение выполнять учебное действие в соответствии с целью;
- развивать умение выбирать средства для достижения цели;
- развивать умение составлять план решения проблемы;
- развивать умение соотносить полученный результат с поставленной целью, осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, и, при необходимости, исправлять ошибки;
- владеть навыками самоконтроля и самооценки своей деятельности.

Формы работы учащихся: фронтальная, в команде, индивидуальная.

Оборудование: интерактивная доска, карточки, значки.

Этап урока	Деятельность учителя	Планируемая деятельность учащихся	УУД	Время
1.Организационный	Создать благоприятный психологический настрой на работу. Учитель приветствует учащихся, проверяет их готовность к уроку, организует внимания детей. -"Ребята, разделимся на 3 группы, путем счета на 1й,2й,3й. Садимся за стол под вашим номером." (столы расставлены таким образом, что за ним могут сидеть определенное кол-во учащихся. Каждый стол подписан)	Включаются в деловой ритм урока. Настраиваются на рабочий лад. Рассаживаются по своим столам	**Л**: умение выделять нравственный аспект поведения **Р**: способность к рефлексии собственной деятельности и деятельности товарищей. **К**: планирование учебного сотрудничества с учителем и сверстниками.	2минуты
2.Актуализация знаний.	1. Актуализирует опорные знания и способы действия. -«Для того чтобы изучить новый материал, надо повторить пройденный» (Контрольные вопросы по теме «Что такое неравенство?»)	Работают всем классом	**Л**: оценивание усваиваемого материала. **Р**: организовывать и планировать учебное сотрудничество с учителем и сверстниками.	5 минут

	-«Вспомните, какие тригонометрические формулы мы уже изучили?» -«Сейчас, ребята, поработаем устно, смотрим на предложенные формулы, говорим, как они раскрываются. Если вы знаете ответ, поднимайте карточку с номером вашего стола» (заранее приготовленные на интерактивной доске формулы, с дальнейшим выведением правильного ответа) 2.Устная работа с комментированием	Вспоминают и дают ответы с комментариями	**К**: уметь оформлять свои мысли в устной форме; слушать и понимать речь других; взаимодействовать с учащимися в парной работе. **П:** структурирование собственных знаний	
3.Постановка цели и задач урока. Мотивация учебной	Создает проблемную ситуацию. Задает вопросы, подводящие к теме урока -" На прошлых занятиях мы изучали тригонометрические уравнения, какие еще	Отвечают на вопросы. Пытаются сформулировать определение	**Л**: самоопределение. **Р**: умение определять и формулировать цель деятельности на уроке с помощью учителя.	5 минут

деятельности учащихся.	математические термины, касающиеся тригонометрии вы знаете"		**К**: умение вступать в диалог, участвовать в коллективном обсуждении вопроса. Умение высказывать свою точку зрения и аргументировать ее. **П**: умение осознанно строить речевое высказывание.	
4.Реализация намеченного (изучение нового материала).	Обеспечивает восприятие, осмысление и первичное запоминания детьми изучаемой темы: многочлены. -«Откроем тетради запишем дату, классная работа, тему урока «Решение простейших тригонометрических неравенств» Объяснение нового материала. Раздача карточек с	Записывают дату в тетрадь, определяют тему и цель урока. Внимательно слушают материал	**Л:** самоопределение. **Р**: проговаривание последовательность действий на уроке; формирование познавательной инициативы. **К:** умение вступать в диалог, участвовать в коллективном обсуждении	15 минут

	необходимым теоретическим материалом.		вопроса. Умение высказывать свою точку зрения и аргументировать ее.	
5.Первичное осмысление и закрепление знаний.	Предлагает учащимся поработать около доски с каждого ряда по ученику. (Перечень заданий следующий: 1. $cosx < \frac{1}{2}$ 2. $cosx \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3. $sinx \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4. $sinx < 1$ 5. $tgx \leq 1$ 6. $ctgx \geq \sqrt{3}$	Трое учеников работают около доски, остальные в тетрадях. Выполняют задание, затем вместе с учителем проверяют верность выполненного задания, анализируют свои ответы	**Л**: формирование готовности к самообразованию. **Р**: планирование своей деятельности для решения поставленной задачи и контроль полученного результата. **К:** умение слушать и вступать в диалог, участвовать в коллективном обсуждении проблем, интегрироваться в группу сверстников и строить продуктивное	5 минут

			взаимодействие, воспитывать ответственность и аккуратность. **П:** формирование интереса к данной теме.	
6.Физминутка (выполняется стоя)	Меняет деятельность, обеспечивает эмоциональную разгрузку учащихся. Учитель обращается к подростку: "Смотри, как я хожу! Какая у меня походка? Быстрая или медленная? Можешь ли ты что-нибудь сказать о моем характере, наблюдая за тем, как я двигаюсь? А теперь попробуй пройтись сама! Хорошо у тебя получается!" "А можешь пройтись так, как будто тебе вообще все безразлично: смотрят на тебя или нет? А можешь пройтись так, как ходят женщины в 50 лет с	Учащиеся поднимаются с мест. Учащиеся сменили вид деятельности и готовы продолжить работу.		2 минуты

	тяжелыми сумками? А как ходят-подпрыгивают девчонки 9-10 лет? А как может пройтись девушка, которая уверена в том, что она самая красивая?" Каждое предложение о выполнении той или иной походки учитель сначала показывает сам, предлагая своей ученикам повторить, основываясь на своей манере ходьбы.			
7.Организация первичного контроля.	Вырабатывает у учеников умение самостоятельно применять свои знания в стандартной, но новой ситуации, самоконтроль, самопроверка. -"Давайте проверим, насколько хорошо вы разобрались в материале. Каждый ученик почувствует себя в роли учителя и попробует объяснить своим, так	Пробуют себя в роли учителя, пытаясь доходчиво объяснить решение.	**Л:** формирование позитивной самооценки. **Р**: умение самостоятельно адекватно анализировать правильность выполнения действий и вносить необходимые коррективы. **П**: умение использовать	7 минут

	называемым ученикам, как решить следующие задания"		информацию, применять знания	
8.Домашнее задание.	Учитель дает домашнее задание: -«Выучить теоретический материал, представленный на карточках и решить индивидуальное задание"	Учащиеся записывают задание.	**Р:** регуляция учебной деятельности. **К**: планирование учебного сотрудничества с учителем и сверстниками. **П**: выделение существенной информации из слов учителя.	1 минута
9.Рефлексия	Инициирует рефлексию детей по поводу психоэмоционального состояния, мотивации, их собственной деятельности и взаимодействия с учителем и другими детьми в классе. -«Какую цель мы поставили в начале урока? Достигли ли вы цели? Ребята, если вы хорошо усвоили тему	Надевают значки определенного вида	**Л:** независимость и критичность мышления. **Р:** оценивание собственной деятельности на уроке. **К**: формулировка и аргументирование своего мнения. **П**: рефлексия способов и условий действия, адекватное	2 минуты

	урока, достигли цели урока, то наденьте красный значок, если нет – синий, объясните, что недопоняли»		понимание причин успеха и неудач, контроль и оценка процесса и результатов деятельности	

3.Контрольный эксперимент

Эксперимент с внедрением представленного элективного курса длился на протяжении 4 месяцев во второй половине 10 класса по 1 часу в неделю. В конце изучения курса учащимся была предложена проверочная работа, проводившаяся до применения элективного курса «Решение тригонометрических уравнений и неравенств».

С результатами проверки можно ознакомиться ниже.

- 10 человек справились со всеми предложенными заданиями (52%)
- 5 человек выполнили 5 заданий (26%)
- 4 человека выполнили 4 задания (22%)

Всего в исследовании приняли участие 19 человек.

Рис.9. – Результаты контрольного исследования уровня знаний

При проведении представленного элективного курса необходимо помнить, что залогом хорошей продуктивной работы с учениками, ко всему прочему является коммуникативная компетентность педагога.

В настоящее время проблема коммуникативной компетентности учителя остается одной из самых актуальных не только для родителей, но и для школьных педагогов, которым необходимо быть не только профессионалом своего дела, психологом, чтобы наиболее полно и качественно осуществлять свою педагогическую деятельность, но также владеть сложными коммуникативными навыками и формировать адекватные умения в социальных структурах, знать культурные нормы и ограничения в общении, кроме того, знание обычаев, традиций, этикета в сфере межличностного общения, соблюдение приличий, воспитанность, ориентация в коммуникативных средствах, присущих данной профессии педагога.

Как известно, для общения с людьми необходимо наличие каких-либо навыков или умений, опыта, каким образом построить коммуникативный процесс в том или ином определенном случае, а также понимания к чему приведет каждый конкретный стиль общения.

На учителя, который вступает в контакт с ребенком, возлагается колоссальная ответственность за качество этого взаимодействия, так как именно при общении происходит обмен средствами и нормами взаимодействия между субъектами общения, то есть обучающимся и учителем.

Возникает вопрос, кем в глазах ребенка является его учитель, обладающий высокой компетентностью в общении? Безусловно, педагог является образцом, при этом не только образцом для подражания. Впитывая манеру и стиль общения своего учителя, ребенок принимает их за наиболее правильные, естественные, а после переработки полученной информации, строит на ее основе собственный стиль общения

Компетентность педагога в общении с ребенком – это основная составляющая его профессионализма, так как именно от того, как построен процесс общения зависят результаты образования и развития обучающихся. Поэтому учитель, организовывая процесс обучения должен учитывать все аспекты от научно - познавательных до эмоциональных. Также, подготовить формы подачи информации, эффективные именно в этом случае.

Желание каждого учителя – привить любовь и интерес к своему предмету. Лучшему усвоению учебного предмета, развитию научного интереса, активизации учебной деятельности учащихся, повышению уровня практической направленности способствуют наиболее активные формы, средства и методы обучения. Активизация познавательной деятельности способствует развитию познавательного интереса.

Подытожим основные мнемические приемы, которые должны использоваться на уроке:

1. Ассоциации – установление связей запоминаемого материала с чем-либо по сходству, смежности или противоположности.

2. Выделение опорных пунктов. Сущность способа заключается в поиске каких-либо опор, точек отсчета.

3. Приемы группировки. Группировка – разбиение материала на части по смыслу, объему, ассоциациям и т. д.

4. Классификация – группировка материала по определенным известным основаниям.

5. Схематизация – изображение или описание чего-либо в упрощенном и обобщенном виде, в графической форме.

Но, рекомендуя различные элективные курсы, мы не должны забывать, что у каждого учителя свои приемы создания атмосферы урока: стиль общения с учениками, приемы выражения требовательности и доброжелательности, приемы включения детей в учебную работу, активизации; приемы, обеспечивающие снятие напряжения во время урока (эмоциональные паузы, физкультминутки, использование музыки).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной дипломной работе были поставлены и выполнены следующие задачи: проведен анализ психолого-педагогической, учебной и методической литературы по проблеме исследования, выявлена роль тригонометрических уравнений и неравенств в обучении математики, выделены основы формирования умений необходимых для решения тригонометрических уравнений и неравенств, классифицированы методы решения тригонометрических уравнений, выявлены проблемы, возникающие при отборе корней в хоре решений уравнений, классифицированы способы отбора корней.

Тригонометрические уравнения всегда занимали одно из важнейших мест в процессе обучения математике, а также развития мыслительных процессов у учащихся старшего школьного возраста, а, следовательно, развития личности в целом.

Переработав множество различной психолого-педагогической и методической литературы по данному вопросу, соответственно, сделать вывод, что мастерство и навык решать тригонометрические уравнения в школьном курсе алгебры и математического анализа, являются несомненно важными не только для усвоения школьного курса, но и для дальнейшего процесса обучения. Каждый школьник может поступить в ВУЗ, где обязательно понадобятся расширенные знания алгебры, в том числе тригонометрии. Также знания тригонометрии необходимы для подготовки к ЕГЭ, важнейшему экзамену в жизни ученика.

Развитие навыков решения тригонометрических уравнений требует больших усилий со стороны учителя математики. Учителю необходимо в полной мере владеть методиками формирования, как первичных знаний тригонометрии, так и более сложного уровня.

Несомненно, при обучении, как тригонометрии, так и остальным темам алгебры, необходимо опираться на знания, умения и индивидуальные особенности каждого учащегося. В современном мире это очень сложная задача, ведь каждый ребенок понимает предложенный материал свое определенное количество времени.

Уровень обучения, а также воспитания в школе в основном определяется ориентированностью педагогического процесса на психологию индивидуального и возрастного развития ребенка, как личности. Это предполагает наблюдение и выявление способностей каждого ребенка, и ко всему прочему, развития не только мыслительных, но и творческих способностей учащегося, укрепления его активной социальной и образовательной позиции, раскрытия неповторимости личности, а также своевременная помощь при затруднениях в образовательном процессе. Педагогу нужно очень постараться, чтобы сделать сложный материал доступным для всех учащихся.

В данной работе рассматривались методы решения тригонометрических уравнений и неравенств. Были рассмотрены методы подбора корней, широко описаны функции и польза единичной окружности.

Также приведены основные теоретические аспекты, такие как определения и свойства тригонометрических функций, выражение тригонометрических функций через другие. Это очень важно для преобразования тригонометрических выражений, а, следовательно, и для всего курса школьной тригонометрии. В дипломной работе были приведены важнейшие формулы, помогающие при решении уравнений, неравенств и остальных тригонометрических заданий. Приведены решения элементарных тригонометрических уравнений и неравенств, широко расписан алгоритм действий при решении определенным методом.

Данная дипломная работа содержит большое количество необходимой информации в разделе тригонометрия. Особенно полезным данный курс будет молодому начинающему учителю. Результаты работы могут быть использованы в качестве учебного пособия для элективных курсов, а также при закреплении знаний данной темы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бордовская, Н. В. Педагогика: учебное пособие / Н. В. Бордовская, А. А. Реан. – СПб.: Питер, 2006. – 304 с.

2. Выгодский М.Я.: Справочник по элементарной математике. Таблицы, арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия, функции и графики. - М.: Элиста, 1996. – 208с.

3. Галицких, Е. О. Диалог в образовании как способ становления толерантности: учебно-методическое пособие / Е. О. Галицких. – М.: Академический Проект, 2004. – 25с.

4. Денищева Л.О.: Дидактические материалы по алгебре и началам анализа. - М.: Изд. дом "Генжер", 1996. – 115с.

5. Ильенков, Э.В. Школа должна учить мыслить [Текст] / Э.В. Ильенков. – М.; Воронеж, 2002. – 278 с.

6. Истомина, Н.Б. Методика обучения математике в старших классах [Текст] / Н.Б. Истомина – М.: Издательский центр «Академия», 2001. – 288 с.

7. Кулагина, И.Ю. Возрастная психология [Текст] / И.Ю. Кулагина. – М.: Исток, 2008. – 456 с.

8. Литвиненко В.Н.: Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия. - М.: Просвещение, 1991. – 78с.

9. Мордкович А.Г.: Краткое справочное пособие по школьному курсу математики. - М.: Новая школа, 1994. – 154с.

10. Никольский С.М.: Алгебра. - М.: АО "Столетие", 1994. – 215с.

11. Олехник С.Н Задачи по алгебре, тригонометрии и элементарным функциям / Олехник, С.Н. и. - М.: Высшая школа, 2001. - 134 с.

12. Осипов В.Ф.: Конкурсные задачи по математике с решениями и указаниями. Алгебра и тригонометрия. - СПб. С.-Петербургский университет, 1996. –236с.

13. Потапов, М.К. Алгебра, тригонометрия и элементарные функции / М.К. Потапов. - М.: Высшая школа, 2001. - 586 с

14. Семенов, Е.М. Развитие мышления на уроках математики [Текст] / Е.М. Семенов, Е.Д. Горбунова. – М.: Педагогика, 2006. – 356 с.

15. Талызина, Н.Ф. Формирование познавательной деятельности учащихся [Текст] Н.Ф. Талызина. – М.: Академия, 2003. – 426 с.

16. Тихомиров, О.К. Психология мышления [Текст] / О.К. Тихомиров. – М.: Просвещение, 2004. – 272 с.

17. Кан-Калик, В. А. Учителю о педагогическом общении: кн. для учителя / В. А. Кан-Калик. – М.: Просвещение, 1987. –196с.

18. Колесникова, И. А. Коммуникативная деятельность педагога: учебное пособие для студентов высших педагогических учебных заведений / И. А. Колесникова; под ред. В. А. Сластёнина. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. –248с.

19. Шаталов В.Ф.: Методические рекомендации для работы с опорными сигналами по тригонометрии. - М.: Новая школа, 1993. –258с.

20. Шаталов В.Ф.: Учебные задания для учащихся по курсу тригонометрии. - М.: Новая школа, 1993. –356с.

21. http://www.bestreferat.ru/referat-200101.html

22. http://mat.1september.ru/1999/no19.htm

23. http://abkov.ru/ege/2011-mys/C1-2011-kornv.pdf

24. http://alexlarin.net/ege/2012/C12012.pdf

25. http://www.cleverstudents.ru/trigonometry/unit_circle.html