ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДЕГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

ЗАДАЧИ НА ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Выпускная квалификационная работа

обучающейся по направлению подготовки
44.03.01 Педагогическое образование, профиль математика
очной формы обучения,
группы 02041402
Савиной Ксении Александровны

Научный руководитель
ст. преподаватель Мандрика
Галина Владимировна

БЕЛГОРОД 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В курсе алгебры и начал математического анализа в 10 - 11 классах изучают элементарные функции. Умения и навыки, приобретаемые обучающимися при изучении функций, имеют прикладной и практический характер. Материал, связанный с изучением функций, составляет значительную часть школьной программы обучения математике. Это объясняется тем, что они широко используются в разных разделах математики, в решении различных прикладных задач. Развитие функциональных представлений в курсе изучения алгебры и начал анализа на старшей ступени обучения помогает старшеклассникам получить наглядные представления о непрерывности любой функции на области ее определения, научиться строить их графики и обобщить сведения об основных элементарных функциях.

Исходя из анализа научной и учебно-методической литературы, можно заключить, что график - это средство наглядности, широко используемое при изучении многих вопросов в школьной программе. График функции выступает основным опорным образом при формировании целого ряда понятий: возрастания и убывания функции, четности и нечетности, обратимости функции, понятия экстремума. У обучающихся должны быть выработаны прочные умения и навыки, как в построении, так и в чтении графиков функций.

Материал, связанный с построением графиков функций, в средней школе изучается недостаточно полно с точки зрения требований, предъявленных на экзаменах. Поэтому задачи на построение графиков нередко вызывают затруднение у поступающих. Основываясь на этом факте, эта тема является необходимой для подробного рассмотрения.

Многие традиционные элементарные задачи (доказательство неравенств, исследование и решение уравнений, и другие) эффективно решаются с помощью понятий производной. Методы математического анализа используются не только для решения поставленных задач, но и являются источником получения новых фактов элементарной математики. В курсе математики с помощью дифференциального исчисления исследуются свойства функции, строятся графики, решаются задачи на наибольшее и наименьшее значения.

Задачи на применение производной также включаются в список заданий ЕГЭ, без сдачи которого сегодняшний выпускник школы не сможет получить аттестат о среднем образовании.

Таким образом, проблема изучения исследования функции в школьном курсе математики на сегодняшний день является актуальной, и поэтому в данной дипломной работе рассматривается методика изучения исследования функций и построения графиков на примере учебников по математике за 10 - 11 класс, а также рассмотрены некоторые задачи на исследование функции, представленные в ЕГЭ.

Объект исследования: школьный курс математики.

Предмет исследования: задачи на исследование функций и построение графиков.

Цель исследования: разработка теоретически обоснованной методики обучения исследованию функций и построению графиков элементарных функций.

Для достижения указанной цели в работе поставлены следующие **задачи**:

1. Систематизировать и углубить теоретические и практические знания по теме «Исследование функций и построение графиков»;
2. Изучить учебно-методическую литературу по данной теме;
3. Рассмотреть применение производной к исследованию функции;
4. Изучить методы преобразования графиков функций, опирающиеся на простейшие приемы (растяжение, сжатие, параллельный перенос, отображение);

5. Разработать программу элективного курса для подготовки к ЕГЭ 10-11 классов средних общеобразовательных учреждений.

Структура выпускной квалификационной дипломной работы: введение, 2 главы, заключение, список литературы, приложение.

Вовведении обусловлена актуальность проблемы, определен научный аппарат исследования.

Первая глава содержит теоретический материал по общим сведениям элементарного исследования функции. Здесь рассматриваются: возрастание и убывание функции, экстремумы функции, наибольшее и наименьшее значение функции, выпуклость графика функции, точки перегиба, асимптоты функции, общая схема исследования функции и построения графика.

Вторая глава посвящена разработке элективного курса по математике для обучающихся 11 класса. В ней представлены учебно-тематическое планирование элективного курса «Задачи на исследование функции и построение графика», разработки вариантов самостоятельных и контрольных работ по теме курса с решениями, индивидуальные задания для обучающихся.

В заключении содержатся выводы по результатам дипломной работы.

ГЛАВА I. Теоретические основы изучения темы элементарное исследование функции и построение графика

1.1. Исследование функции на возрастание и убывание

Производная используется для исследования функций. Например, одна из основных задач исследования функции - нахождение промежутков возрастания и убывания функций.

Рассмотрим применение производной к нахождению промежутков возрастания и убывания функций. Пусть значения производной функции $y = f(x)$ положительны на некотором промежутке $(a; b)$, т.е. $y = f'(x) > 0$. Тогда угловой коэффициент касательной $\mathrm{tg}\, a = f'(x)$ к графику этой функции в каждой точке данного промежутка положителен. Это означает, что касательная образует острый угол осью Ox, и поэтому график функции на этом промежутке «поднимается», т.е. функция $f(x)$ возрастает (Рис. 1.1)[2].

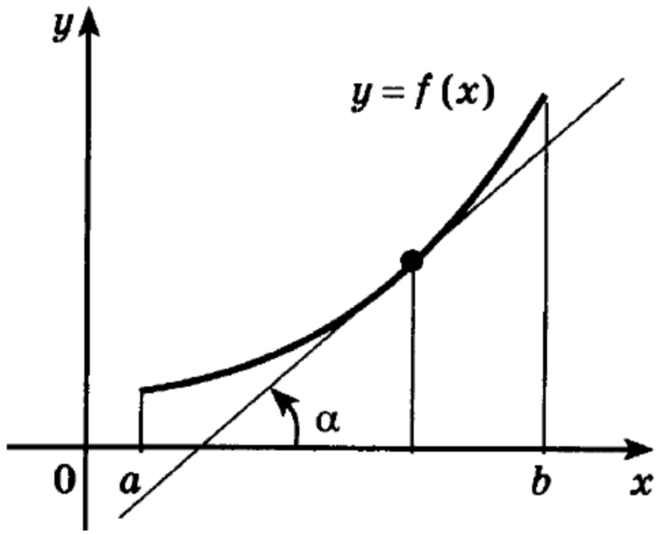


Рис. 1.1 Возрастание функции $y = f(x)$

Если $f'(x) < 0$ на некотором промежутке, то угловой коэффициент касательной $tg\, a = f'(x)$ к графику функции $y = f(x)$ отрицателен. Из этого следует, что касательная образует тупой угол с осью Ox, и поэтому график функции на этом промежутке «опускается», т.е. функция $f(x)$ убывает (Рис.1.2).

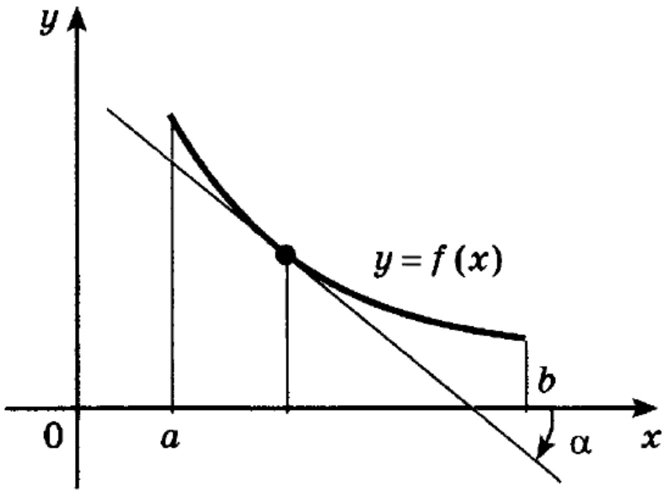


Рис. 1.2 Убывание функции $y = f(x)$

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется возрастающей, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции [1].

Если $f'(x) > 0$ на некотором промежутке, то функция $f(x)$ возрастает на этом промежутке.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется убывающей, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции [1].

Если $f'(x) < 0$ на некотором промежутке, то функция $f(x)$ убывает на этом промежутке.

Достаточный признак возрастания функции. Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала $(a; b)$, то эта функция возрастает на $(a; b)$.

Достаточный признак убывания функции. Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала $(a; b)$, то эта функция убывает на $(a; b)$.

Промежутки возрастания и убывания функции часто называют промежутками монотонности этой функции.

Необходимые и достаточные признаки монотонности функции [2]:

1) Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) > 0$ во всех точках интервала, то функция $y = f(x)$ возрастает на этом интервале;

2) Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) < 0$ во всех точках интервала, то функция $y = f(x)$ убывает на этом интервале;

3) Если $f'(x) \geq 0$ для всех точек интервала $(a; b)$, то функция $y = f(x)$ не убывает на этом интервале, т.е. для любых двух точек из интервала $(a; b)$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \leq f(x_2)$;

4) Если $f'(x) \leq 0$ для всех точек интервала $(a; b)$, то функция $y = f(x)$ не убывает на этом интервале, т.е. для любых двух точек из интервала $(a; b)$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Задача №1. Доказать что функция $f(x) = x + \frac{1}{x}$ возрастает на промежутке $(1;\ +\infty)$ [4].

Решение: Найдем производную $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$.

Если $x > 1$, то $\frac{x^2-1}{x^2} > 0$, т.е. $f'(x) > 0$ при $x > 1$, и поэтому данная функция возрастает на промежутке $(1;\ +\infty)$.

Задача №2. Найти интервалы монотонности функции $f(x) = x^3 - 3x^2$[17].

Решение: Найдем производную $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Решая неравенство $3x^2 - 6x > 0$, находим интервалы возрастания: $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$.

Решая неравенство $f'(x) < 0$, т.е. неравенство $3x^2 - 6x < 0$, находим интервалы убывания $(0; 2)$.

Построим график функции $y = x^3 - 3x^2$ (Рис. 1.3)

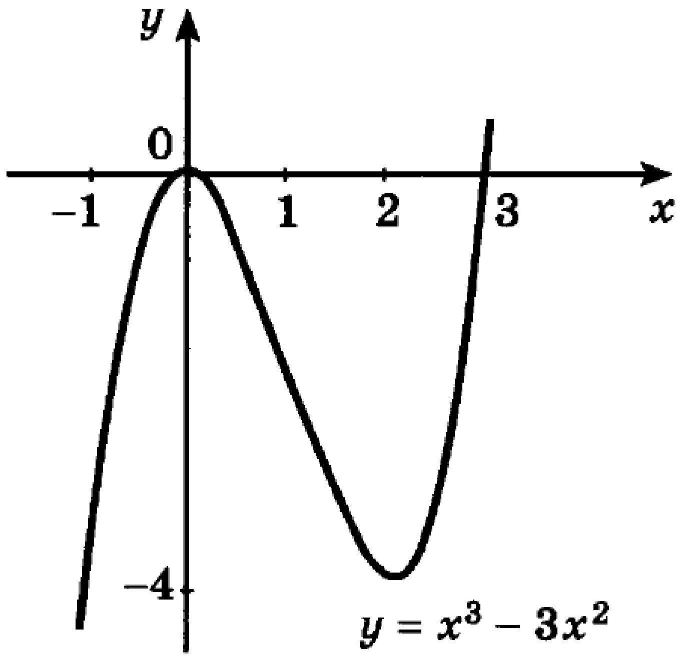


Рис. 1.3 График функции $y = x^3 - 3x^2$

Из этого рисунка видно, что функция $y = x^3 - 3x^2$ возрастает не только на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$, но и на промежутках $(-\infty; 0]$ и $[2; +\infty)$; убывает не только на интервале $(0; 2)$, но и на отрезке $0; 2$.

Таким образом, получим схему исследования функции на возрастание и убывание [16]:

1. Найти область определения;
2. Найти производную функции;
3. Найти критические точки (приравнять производную к нулю, найти точки, в которых производная равна нулю или не существует);
4. Разбить область определения критическими точками на промежутки;
5. Определить знак производной на каждом из промежутков;
6. Сделать выводы о возрастании и убывании функции на этих промежутках.

1.2. Нахождение точек экстремума функции

При исследовании поведения функции важную роль играют точки, которые отделяют друг от друга интервалы монотонного возрастания от интервалов ее монотонного убывания.

Определение 3. Точка x_0 называется точкой максимума функции $f\ \ x$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ [14].

Например, точка $x_0 = 0$ является точкой максимума функции $f\ \ x\ \ = 1 - x^2$, так как $f\ \ 0\ \ = 1$ и при всех значениях $x \neq 0$ верно неравенство $f\ \ x\ \ < 1$ (Рис. 1.4)[2].

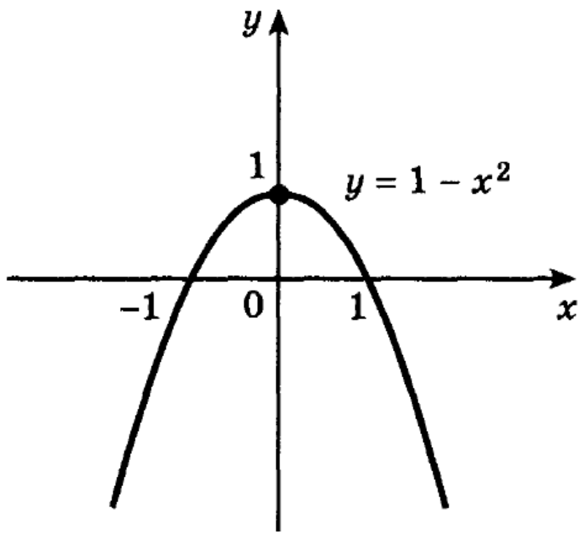


Рис. 1.4 График функции $f\ \ x\ \ = 1 - x^2$

Определение 4.Точка x_0 называется точкой минимума функции $f\ \ x$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f\ \ x\ \ > f(x_0)$ [4].

Например, точка $x_0 = 2$ является точкой минимума функции $f\ \ x\ \ = 3 + (x-2)^2$, так как $f\ \ 2\ \ = 3$ и $f\ \ x\ \ > 3$ при всех значениях $x \neq 2$ (Рис.1.5)

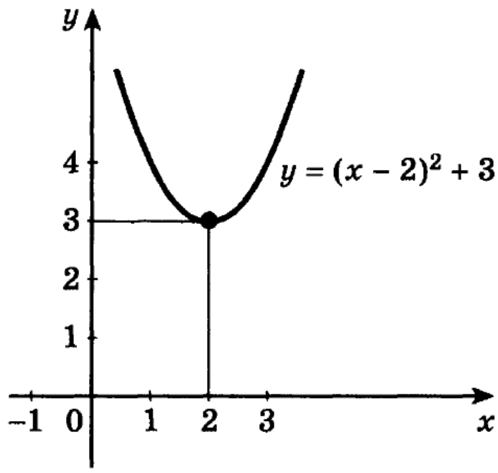


Рис. 1.5 График функции $f(x) = 3 + (x - 2)^2$

Определение 5. Точки максимума и минимума называются точками *экстремума*, а значения функции в этих точках – *экстремумами функции*[14].

Рассмотрим функцию $f(x)$, которая определена в некоторой окрестности x_0 и имеет производную в этой точке.

Необходимое условие экстремума. Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$ и в этой точке существует $f'(x)$, то она равна нулю: $f'(x) = 0$ [2].

Теорема Ферма имеет наглядный геометрический смысл: касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$, где x_0 – точка экстремума функции $y = f(x)$, параллельна оси абсцисс, и поэтому ее угловой коэффициент $f'(x_0)$ равен нулю (Рис. 1.6).

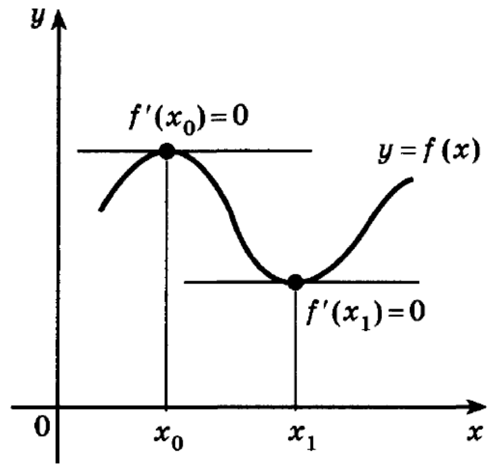


Рис. 1.6 Геометрический смысл теоремы Ферма

Например, функция $f(x) = 1 - x^2$ (Рис.1.4) имеет в точке x_0 максимум, ее производная $f'(x) = -2x$, $f'(0) = 0$. Функция $f(x) = 3 + (x-2)^2$ имеет минимум в точке $x_0 = 2$ (Рис.1.5), $f'(x) = 2(x-2)$, $f'(2) = 0$ [2].

Отметим, что если $f'(x_0) = 0$, то этого недостаточно, чтобы утверждать, что x_0 обязательно точка экстремума функции $f(x)$.

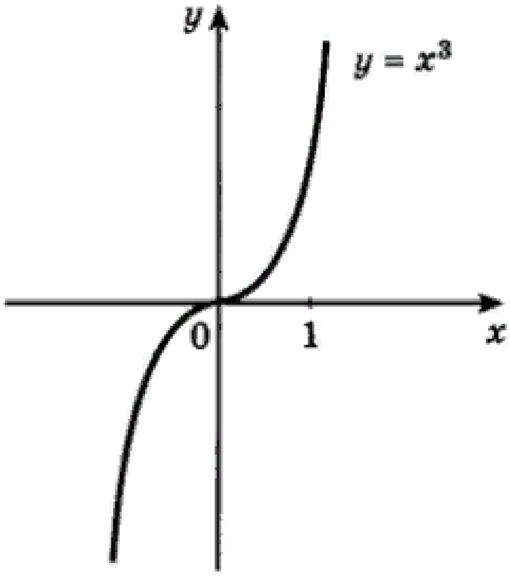


Рис. 1.7 График функции $f(x) = x^3$

Например, если $f(x) = x^3$, то $f'(0) = 0$. Однако точка $x = 0$ не является точкой экстремума, так как функция x^3 возрастает на всей числовой оси (Рис.1.7).

Итак, точки экстремума дифференцируемой функции нужно искать только среди корней уравнения $f'(x) = 0$, но не всегда корень этого уравнения является точкой экстремума. Точки, в которых производная функции равна нулю, называют стационарными точками функции.

Заметим, что функция может иметь экстремум и в точке, где эта функция не имеет производной. Например, $x = 0$ - точка минимума функции $f(x) = |x|$, а $f'(0)$ не существует.

Определение 6. Точки, в которых функция имеет производную, равную нулю, или недифференцируема, называют критическими точками этой функции [9].

Таким образом, для того чтобы точка x_0 была точкой экстремума функции $f(x)$, необходимо, чтобы эта точка была критической точкой данной функции.

Приведем достаточные условия, при выполнении которых стационарная точка есть точка максимума или минимума функции.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$, $x_0 \in (a;b)$, и $f'(x_0) = 0$ [1].

Тогда:

1) Если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ её производная меняет знак с «плюса» на «минус», т.е. $f'(x) > 0$ слева от точки x_0 и $f'(x) < 0$ справа от точки x_0, то x_0 является точкой максимума функции $f(x)$ (Рис. 1.8);

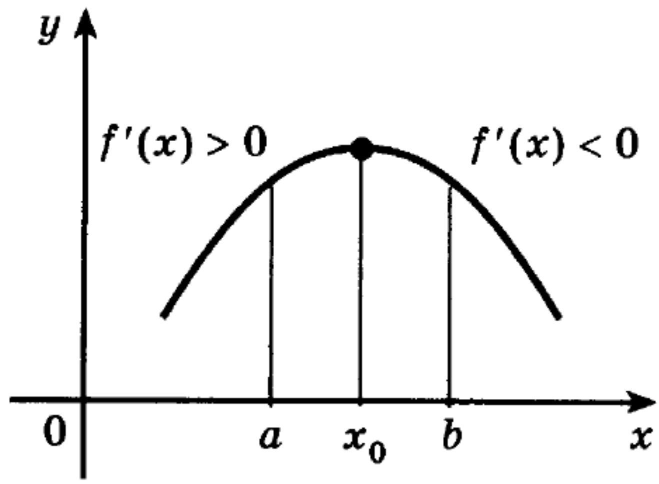


Рис. 1.8 Точка максимума функции $f(x)$

2) Если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ её производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то x_0 является точкой минимума функции $f(x)$ (Рис. 1.9).

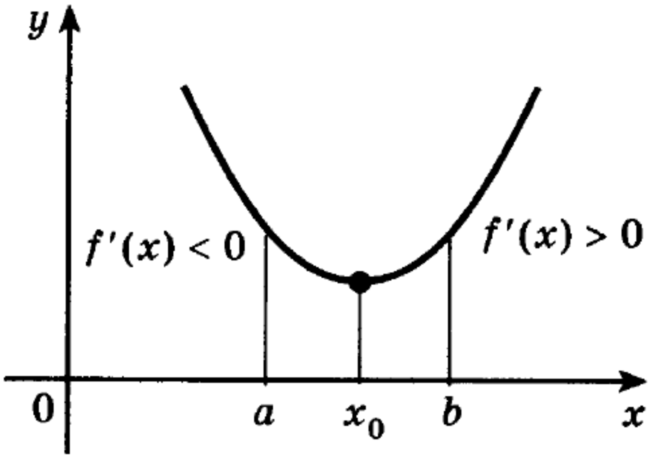


Рис. 1.9 Точка минимума функции $f(x)$

Задача №1. Найти точки экстремума функции $f(x) = x^4 - 4x^3$ [25].

Решение: Найдем производную: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$.

Найдем стационарные точки: $4x^2(x-3) = 0$,

$x_1 = 0,\ x_2 = 3$.

Методом интервалов устанавливаем, что производная

$$f'(x) = 4x^2(x-3)$$

положительна при $x > 3$, отрицательна при $x < 0$ и при $0 < x < 3$.

Так как при переходе через точку $x_1 = 0$ знак производной не меняется, то эта точка не является точкой экстремума функции.

При переходе через точку $x_2 = 3$ производная меняет знак с «минуса» на «плюс». Следовательно, $x_2 = 3$ – точка минимума.

Задача №2. Найти точки экстремума функции $f(x) = x^3 - x$ и значения функции в этих точках [18].

Решение: Найдем производную: $f'(x) = 3x^2 - 1 = 3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Приравнивая производную к нулю, находим стационарные точки: $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

При переходе через точку $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ производная меняет знак с «плюса» на «минус». Следовательно, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ – точка максимума.

При переходе через точку $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ производная меняет знак с «минуса» на «плюс», поэтому $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ – точка минимума функции.

Значение функции в точке максимума равно $f\ \ -\frac{1}{\sqrt{3}}\ \ = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, а в точке минимума $f\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \ = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Таким образом, для исследования непрерывной функции $y = (x)$ на монотонность и экстремумы можно воспользоваться следующим алгоритмом [16]:

1. Найти производную функции $f'\ \ x\ \ $;
2. Найти стационарные и критические точки на всей числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках;
3. Опираясь на знание теорем представленных ранее, сделать выводы о монотонности функции и точках экстремума.

1.3. Задачи на наибольшее и наименьшее значение функции

Решение практических задач часто сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции.

Пусть функция $f\ \ x$ непрерывна на $\ a;b\ $ и имеет несколько критических точек на этом отрезке.

Задача №1. Функция $f\ \ x\ \ = x^3 + \frac{3}{x}$ непрерывна на отрезке $\ \frac{1}{2};2\ $. Найти ее наибольшее и наименьшее значения[8].

Решение:

1) $f\ \ \frac{1}{2}\ \ = 6\frac{1}{8}, f\ \ 2\ \ = 9\frac{1}{2}$.

2) $f'\ \ x\ \ = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = \frac{3x^4-3}{x^2}$,

$3x^4 - 3 = 0$,

$x_1 = 1, x_2 = -1$.

Отрезку $\ \frac{1}{2};2\ $ принадлежит стационарная точка $x_1 = 1, f\ \ 1\ \ = 4$.

3) Из чисел $f\left(\frac{1}{2}\right)=6\frac{1}{8}$, $f(2)=9\frac{1}{2}$, $f(1)=4$ наибольшее $9\frac{1}{2}$, наименьшее 4.

Ответ: $\max_{\left[\frac{1}{2};2\right]} f(x)=f(2)=9\frac{1}{2}$; $\min_{\left[\frac{1}{2};2\right]} f(x)=f(1)=4$

Задача № 2. Функция $f(x)=x+\frac{1}{x}$ непрерывна на отрезке $[2;4]$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения [7].

1) $f(2)=2{,}5, f(4)=4{,}25.$

2) $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}, 1-\frac{1}{x^2}=0, x_1=-1, x_2=1.$

На интервале $(2;4)$ стационарных точек нет.

3) Из чисел 2,5 и 4,25 наибольшее 4,25, наименьшее 2,5.

Ответ: $\max_{[2;4]} f(x)=f(4)=4{,}25$; $\min_{[2;4]} f(x)=f(2)=2{,}5$

Задача №3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=x^3-1{,}5x^2-6x+1$на отрезке $[-2;0]$ [13].

1) $f(-2)=-1, f(0)=1$

2) Найдем критические точки.

$f'(x)=3x^2-3x-6$ определена для любых x.

Решим уравнение $f'(x)=0$

$$3x^2-3x-6=0$$

$$x_1=-1, x_2=2$$

Отрезку $[-2;0]$ принадлежит стационарная точка $f(-1)=4{,}5$,

3) Из чисел $f(-2)=-1, f(0)=1$, $f(-1)=4{,}5$ наименьшее равно -1, наибольшее равно 4,5

Ответ: $\max_{[-2;0]} f(x)=f(-1)=4{,}5$; $\min_{[-2;0]} f(x)=f(-2)=-1.$

При решении многих задач часто приходится находить наибольшее или наименьшее значение функции не на отрезке, а на интервале. Редко встречаются задачи, в которых функция $f(x)$ имеет на заданном интервале только одну стационарную точку: точку максимума или минимума. В этих случаях в точке максимума функция $f(x)$ принимает наибольшее значение на заданном интервале (Рис.1.10(а)). В точке минимума принимает наименьшее значение на заданном интервале (Рис. 1.10(б)).

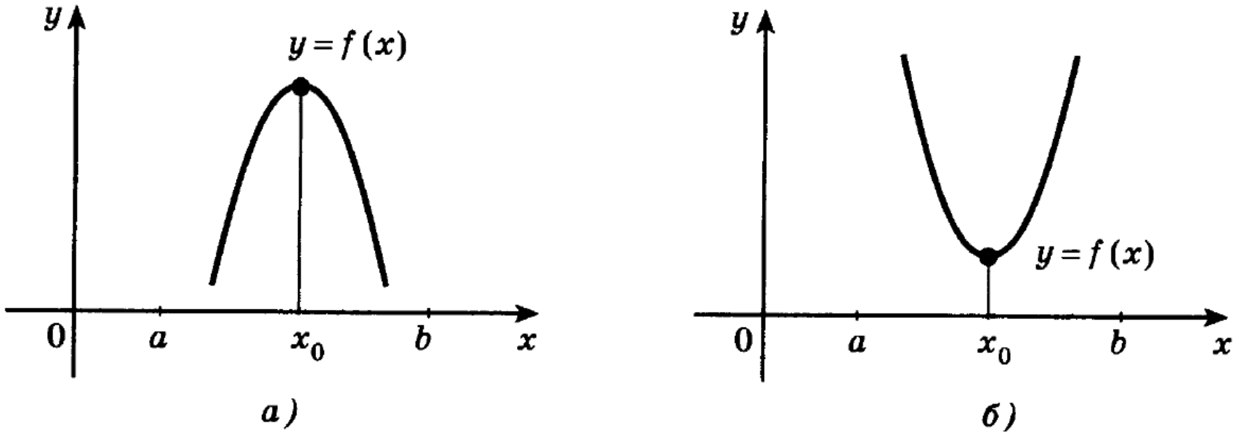


Рис. 1.10 Функция $f\ \ x$ на заданном интервале $a; b$

Если значения функции $f\ \ x$ неотрицательны на некотором промежутке, то эта функция и функция $f\ \ x\ \ ^{n}$, где n - натуральное число, принимают наибольшее (наименьшее) значение в одной и той же точке [2].

Таким образом, подводя итог, нетрудно составить алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции $y = f\ \ x$ на отрезке $a; b$ [17]:

1) Найти значения функции на концах отрезка, т.е. числа $f\ \ a$ и $f\ \ b$;
2) Найти ее значения в тех критических точках, которые принадлежат интервалу $a; b$;
3) Из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

1.4. Исследование на выпуклость графика функции и точки перегиба

Еще одной характеристикой графика функции, которую можно определять с помощью производной, является его выпуклость или вогнутость.

Определение 7. Функция $y = f(x)$, дифференцируемая на интервале $(a; b)$ называется выпуклой вверх на этом интервале, если ее производная $f'(x)$ убывает на промежутке $(a; b)$ [4].

Определение 8. Функция $y = f(x)$, дифференцируемая на интервале $(a; b)$ называется выпуклой вниз на этом интервале, если ее производная $f'(x)$ возрастает на промежутке $(a; b)$, и потому $f''(x) > 0$ (Рис.1.14)

Еслиx_0 – любая точка интервала $(a; b)$, то график функции, выпуклой вниз, при всех $x \in \ a; b$ и $x \neq x_0$ (Рис. 1.14) лежит выше касательной к этому графику в точке $x_0; f\ x_0$ [14].

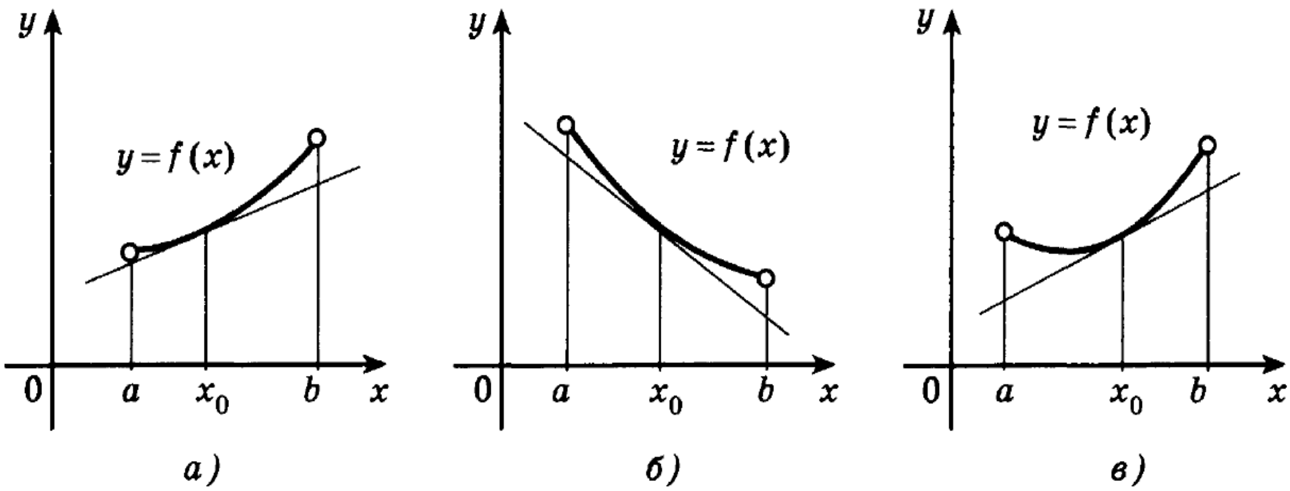


Рис. 1.14 График функции $y = f(x)$ выпуклой вниз

Определение 9. Интервалы, на которых функция выпукла вверх или вниз, называют интервалами выпуклости этой функции.

Рассмотрим, как с помощью второй производной можно находить интервалы выпуклости.

Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале $(a;b)$ вторую производную. Тогда если $f''(x) < 0$ для всех $x \in (a;b)$, то на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ выпукла вверх, а если $f''(x) > 0$ на интервале $(a;b)$, то функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале $(a;b)$.

Задача 1. Найти интервалы выпуклости вверх и вниз функции $f(x)$, если [13]:

1) $f(x) = x^3$;

2) $f(x) = \sin x, -\pi < x < \pi$.

Решение:

1) Если $f(x) = x^3$, то $f''(x) = 6x$. Так как $f''(x) < 0$ при $x < 0$ и $f''(x) > 0$ при $x > 0$, то на промежутке $(-\infty; 0)$ функция x^3 выпукла вверх, а на промежутке $(0; +\infty)$ выпукла вниз (Рис. 1.15).

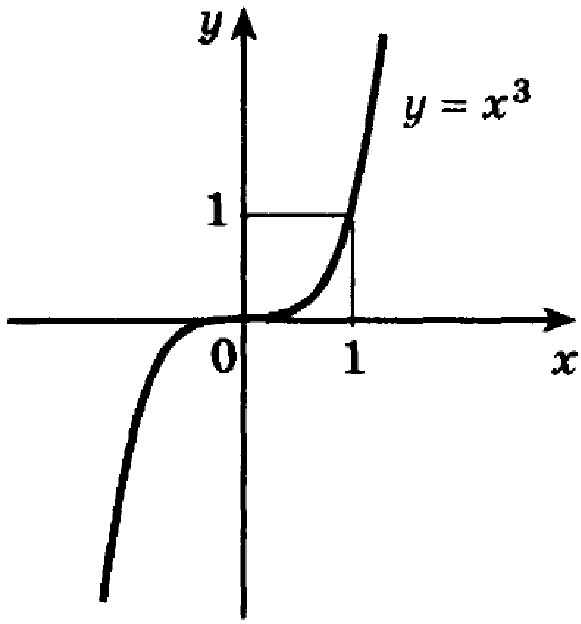


Рис. 1.15 График функции $f(x) = x^3$

2) Если $f(x) = \sin x$, то $f''(x) = -\sin x$. Пусть $-\pi < x < 0$, тогда $\sin x < 0$ и $f''(x) > 0$. Следовательно, функция $\sin x$ выпукла вниз и на интервале $(-\pi; 0)$ (Рис.1.16). Аналогично функция $\sin x$ выпукла вверх на интервале $(0; \pi)$, так как $-\sin x < 0$ при $0 < x < \pi$.

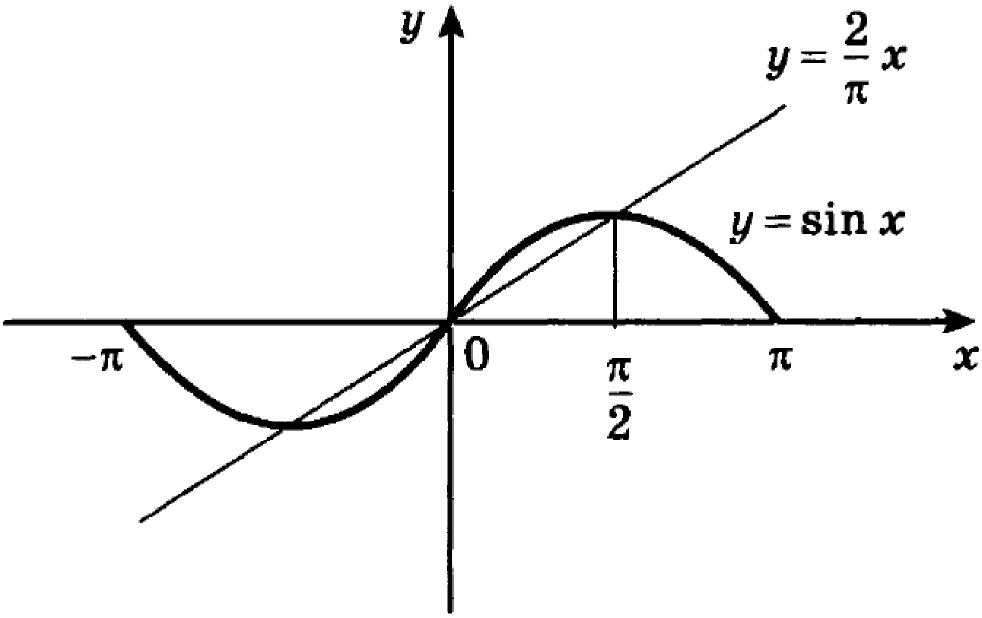


Рис. 1.16 График функции $f(x) = \sin x$

Определение 10. Точка, отделяющая интервал выпуклости от интервала вогнутости, называется точкой перегиба функции [7].

Другими словами, в точке перегиба x_0 дифференцируемая функция меняет направление выпуклости.

Отметим, что при переходе через точку перегиба x_0 функции $f(x)$ график этой функции переходит с одной стороны касательной к этому графику в точке x_0 на другую сторону.

С помощью второй производной можно находить точки перегиба.

Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале $(a;b)$ вторую производную. Тогда если $f''(x)$ имеет знак при переходе через точку x_0, где $x_0 \in (a;b)$, то x_0 – точка перегиба функции $f(x)$.

Задача 2. Найти точки перегиба функции $f(x)$[12]:

1) $f(x) = xe^{-x}$;

2) $f(x) = x^4 - 2x^3$.

Решение: Найдем первую и вторую производную функции.

1) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$,

$f''(x) = -e^{-x}(1-x) - e^{-x} = e^{-x}(x-2)$.

Так как $f''(x) < 0$ при $x < 2$ и $f''(x) > 0$ при $x > 2$, то $x = 2$ – точка перегиба функции xe^{-x}. Других точек перегиба нет.

2) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2, f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$.

Функция $f''(x)$ меняет знак при переходе через точки 0 и 1 (и только в этих точках). Следовательно, $x = 0$ и $x = 1$ – точки перегиба функции $f(x) = x^4 - 2x^3$.

Таким образом, составим алгоритм исследования функции на выпуклость (вогнутость) и точки перегиба:

1) Найти область определения функции;
2) Найти первую и вторую производные функции $f(x)$;
3) Найти точки, в которых $f''(x) = 0$, или не существует;
4) На координатную ось нанести область определения функции и критические точки. В полученных интервалах определить знак второй производной и поведение функции;
5) Определить, какие из критических точек являются точками перегиба, вычислить значения функции в этих точках;
6) Указать интервалы выпуклости (вогнутости) графика функции.

1.5. Построение асимптот графика функции

В предыдущих пунктах были рассмотрены методы исследования поведения функции с помощью производной. Все же среди вопросов, касающихся полного исследования функции, есть и такие, которые с производной не связаны.

Так, например, необходимо знать, как ведет себя функция при бесконечном удалении точки ее графика от начала координат. Такая проблема может возникнуть в двух случаях: когда аргумент функции уходит на бесконечность и когда при разрыве второго рода в конечной точке уходит на бесконечность сама функция. В обоих этих случаях может возникнуть ситуация, когда функция будет стремиться к некоторой прямой, называемой асимптотой функции.

Определение. Асимптотой графика функции $y = f\ x$, называется прямая линия, обладающая тем свойством, что расстояние от графика до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат [22].

Различают три типа асимптот: вертикальные, наклонные и горизонтальные.

График функции$y = f\ x$, изображенный на Рис. 1.17, обладает следующей особенностью: какое бы число $p > 0$ ни взять, можно указать такую окрестность точки a, что для любого x из этой окрестности $(x \neq 0)$ соответствующая ордината графика по модулю будет больше p, т.е. $f(x) \ > p$. Говорят, что прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, и пишут: $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

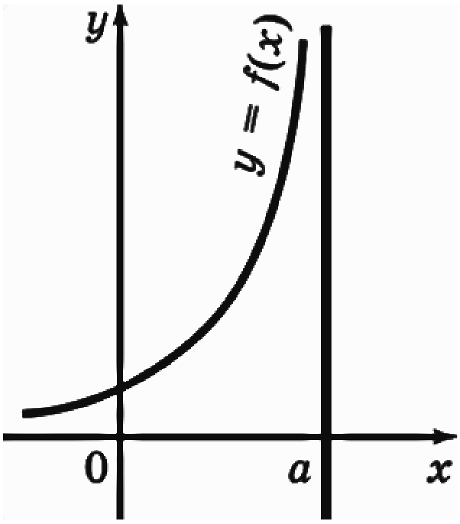


Рис. 1.17 График функции $y = f\ x$

Чаще всего график имеет вертикальную асимптоту $x = a$ в случае, если выражение, задающее данную функцию, имеет вид дроби, знаменатель которой обращается в нуль в точке a, а числитель нет. Например, график функции $f\ x\ = \frac{1}{x}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ и горизонтальную асимптоту $y = 0$ (Рис.1.18) [19].

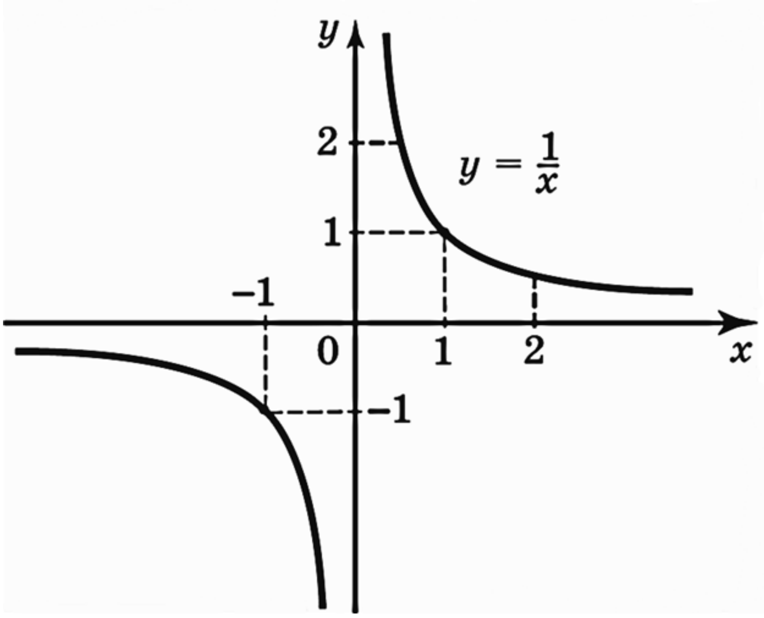


Рис. 1.18 График функции $f(x) = \frac{1}{x}$

График функции $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ (Рис. 1.19).

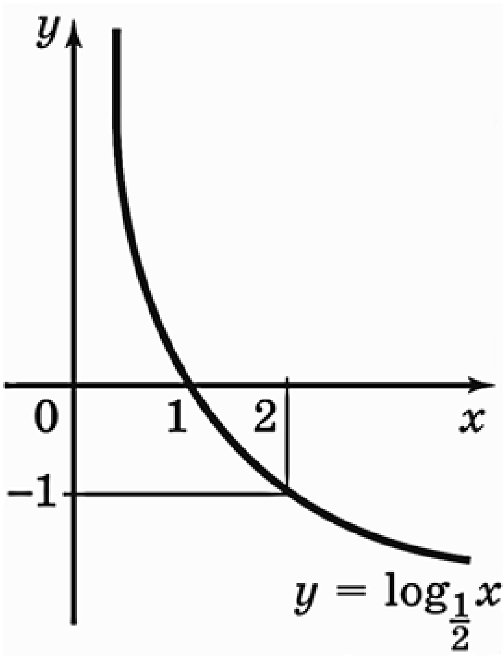


Рис. 1.19 График функции $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Для графика функции $f(x) = tgx$ вертикальными асимптотами являются прямые $x = \frac{\pi}{2},\ x = -\frac{\pi}{2},\ x = \frac{3\pi}{2}, x = -\frac{3\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$ и т. д

Если $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ и в точке a функции $p(x)$, $q(x)$ непрерывны, причем $p(a) \neq 0, q(a) = 0$, то $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Например, график функции $y = \frac{1}{x^2-9}$ имеет две вертикальные асимптоты: $x = 3$ и $x = -3$ (Рис. 1.20) – при указанных значениях x знаменатель $x^2 - 9$ обращается в нуль [7].

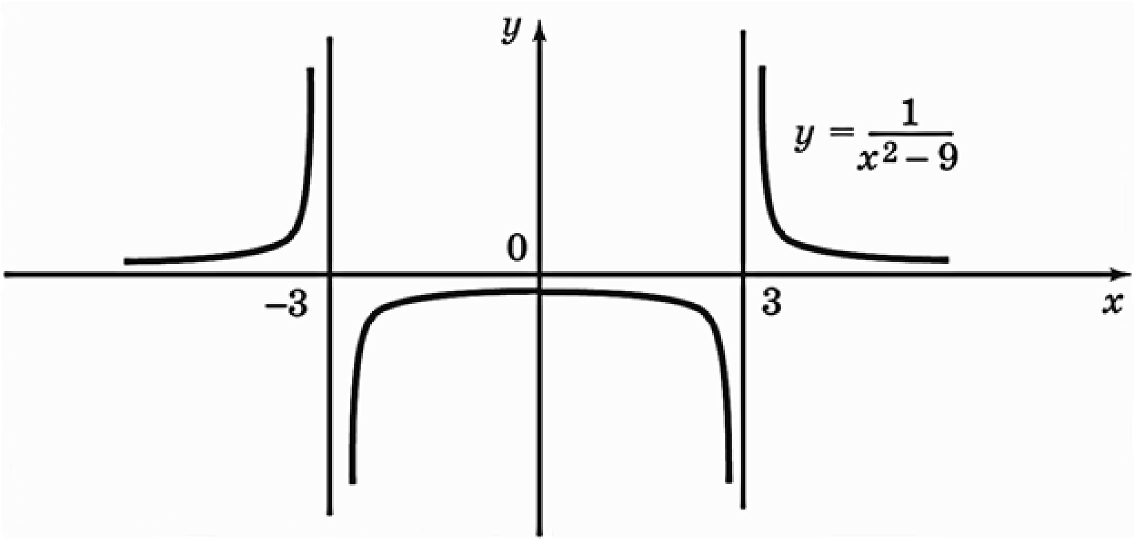


Рис. 1.20 График функции $y = \frac{1}{x^2-9}$

Если график функции неограниченно приближается к некоторой горизонтальной или наклонной прямой при неограниченном возрастании (по модулю) x, то такую прямую называют горизонтальной (соответственно наклонной) асимптотой.

Наклонные асимптоты описываются общим уравнением прямой линии на плоскости, то есть $y = kx + b$, коэффициенты которого находят с помощью решения пределов $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = b$. Если хотя бы один из пределов бесконечен, то наклонная асимптота отсутствует. Частный случай: горизонтальную асимптоту $y = b$ находят с помощью конечного предела $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ [16].

Пример 1. Найти горизонтальную асимптоту графика функции $y = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$ при $x \to +\infty$ [6].

Решение: Чтобы найти горизонтальную асимптоту, надо вычислить предел функции при $x \to +\infty$.

Имеем: $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}=$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}=0$

Значит, $y=0$ – горизонтальная асимптота графика функции $y=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$.

Таким образом, учитывая представленный материал, можно составить алгоритм нахождения асимптот:

1) Найти область определения функции;
2) Определить наличие точек разрыва второго рода;
3) Для уравнения наклонной асимптоты $y=kx+b$ найти $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k$, $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b$ (если они существуют). Сделать вывод.

1.6. Общая схема исследования функции и построения графика

На основании представленного теоритического материала можно провести полное исследование функции с качественным построением ее графика. При построении графика данной функции $y=f(x)$ рационально использовать следующую схему:

1) Найти область определения и область значений функции f;

Определение. Областью определения функции $y=f(x)$ называется совокупность всех значений независимой переменной x, для которых функция $y=f(x)$ определена и обозначается $D(f)$ [3].

Множество всех $y\in Y$ называется множеством значений функции и обозначается $E(f)$, где x – независимая переменная величина или аргумент, y – функция или зависимая переменная.

2) Исследовать функцию на четность и нечетность;

Определение. Функция, $y=f(x)$ определенная на множестве D, называется четной, если $\forall x\in D$ выполняется условие $(-x)\in D$ и $f(-x) = -f(x)$, называется нечетной, если $\forall x\in D$ выполняется условие $(-x)\in D$ и $f(-x)=-f(x)$ [3].

Алгоритм исследования функции $y=f(x)$ на четность [18]:

1. Определить, симметрична ли область определения функции. Если нет, то функция не является ни четной, ни нечетной. Если да, то переходить ко второму шагу;
2. Найти $f(-x)$;
3. Сравнить $f(-x)$ и $f(x)$:
   а) если $f(-x)=f(x)$, то функция – четная;
   б) если $f(-x)=-f(x)$, то функция – нечетная;
   в) если хотя бы в одной точке $x\in X$ выполняется соотношение $f(-x)\neq f(x)$ и хотя бы в одной точке $x\in X$ выполняется соотношение $f(-x)\neq -f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

3) Исследовать, является ли функция периодической;

Определение. Функция $y=f(x)$, определенная на множестве D, называется периодической на этом множестве, если существует такое число $T>0$, что для $\forall x\in D, (x+T)\in D$ и $f(x+T)=f(x)$, при этом число T называется периодом функции [19].

Наименьшее положительное число T, удовлетворяющее равенству $f(x+T)=f(x)$, является основным периодом функции.

Если функция периодическая, то исследование проводится на любом интервале, длина которого совпадает с основным периодом функции.

Пример:

$$y=\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(x+T)=\sin\left(\frac{x+T}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}+\frac{T}{3}\right)=\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right),$$

Если $\frac{T}{3} = 2\pi n, n \in Z \to T = 6\pi n, n \in Z \to \sin\ \frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}$ - периодическая функция, с основным периодом 6π.

Заметим, что периодические функции не имеют наклонных и горизонтальных асимптот.

4) Найти точки пересечения графика с осями координат (если это возможно);

Для того чтобы найти точки пересечения с осью Ox, необходимо в уравнение $y = f(x)$ подставить $y = 0$, чтобы найти точки пересечения с осью Oy, необходимо в уравнение $y = f(x)$ подставить $x = 0$.

5) Найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых $f\ \ x\ \ > 0$ и $f\ \ x\ \ < 0$);

6) Найти асимптоты графика функции (см. 1.5);

7) Найти интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции (см. 1.1-1.2);

8) Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба (см. 1.4);

9) Построить график функции.

Таким образом, знание производной позволяют решать многочисленные задачи, как в курсе алгебры, так и в курсах физики и геометрии.

Разработка программы элективного курса «Задачи на исследование функции и построение графиков» для обучающихся 11 классов

Пояснительная записка

В настоящее время к числу наиболее актуальных вопросов математического образования относится осуществление функциональной подготовки школьников. Элективный курс «Задачи на исследование функции и построение графиков» рассчитан на 18 часов для обучающихся 11 классов. Программа составлена в соответствии с программой по математике для общеобразовательных учреждений.

Материал для занятий подобран таким образом, чтобы можно было проиллюстрировать красоту построения графиков. На занятиях используется большое количество таблиц, чертежей, эскизов различных функций, в результате чего у обучающихся должен возникнуть зрительный образ непрерывной и разрывной функции, четной и нечетной, возрастающей и убывающей функции, знакопостоянства функции, секущей и касательной к графику функции.

Данный курс посвящен разбору основных приемов построения графиков на примерах элементарных функций. Методическими особенностями данного курса является то, что процесс построения осуществляется постепенно, шаг за шагом, в ходе обсуждения свойств и особенностей функции.

К 11 классу у обучающихся накапливается существенный арсенал знаний о различных математических функциях. Возникает потребность обобщить, дополнить и систематизировать вопросы, связанные с исследованием свойств функций. Многие задания ЕГЭ требуют аккуратного применения данных вопросов. Осуществление функциональной подготовки школьников относится к числу наиболее актуальных вопросов современного математического образования.

Актуальность состоит в том, что данный курс позволяет расширить представление о функциональных понятиях, помочь учащимся осознать особенности различных способов задания функций, перехода от одного языка описания функций к другому.

Цель данного элективного курса – представить единым целым все вопросы, связанные с применением свойств математических функций при решении самых разнообразных математических задач.

Курс призван способствовать решению следующих **задач:**

- ✓ овладение системой знаний о свойствах функций;
- ✓ расширение функциональных знаний за пределами программного материала;
- ✓ формирование логического мышления учащихся;
- ✓ накопление опыта в применении изученного аппарата функций к решению практических задач;
- ✓ подготовка учащихся к итоговой аттестации;
- ✓ овладение системой знаний и умений, необходимых для изучения смежных дисциплин.

Программа курса рассчитана на 18 часов. Режим занятий – один раз в неделю. Срок реализации курса – четверть.

Программа курса предусматривает использование следующих технологий обучения**:** компьютерные технологии; текстовые технологии; личностно-ориентированная технология; технология исследовательской деятельности; коммуникативно-диалоговые технологии; проектная деятельность.

Для реализации данной программы используются различные формы организации занятий. Большая часть времени отводится к практическим занятиям, на которых отрабатываются навыки построения графика функции как цепочки преобразований графика простейшей функции (сдвиг, растяжение, зеркальное отображение). Наряду с проведением традиционных занятий программа курса предусматривает проведение практических занятий, лекций и семинаров. Освоение курса предполагает помимо посещения коллективных занятий (лекции, семинары, практические занятия) выполнения домашних заданий по исследованию и построению графиков функций, реферативной работы по темам: «Степенная функция», «Тригонометрическая функция», «Логарифмическая функция», «Показательная функция».

Требования к уровню подготовки учащихся

В ходе освоения предмета по выбору учащиеся приобретают и совершенствуют опыт:

- ✓ построения графиков функций и исследования функций;
- ✓ самостоятельной работы с учебной литературой;
- ✓ ясного и грамотного изложения своих мыслей в устной и письменной речи с использованием словесного и графического языков математики;
- ✓ самостоятельной и коллективной работы, включение результатов своей работы в результаты работы группы.

В результате изучения элективного курса ученик **должен:**

- ✓ понимать, что функция - это математическая модель, позволяющая описывать и изучать разнообразные зависимости между реальными процессами;
- ✓ правильно употреблять функциональную терминологию;
- ✓ понимать символику при чтении текста, в речи учителя и учащихся, в формулировке задач;
- ✓ приобрести опыт в применении изученного аппарата функций к решению практических задач;
- ✓ понимать содержательный смысл важнейших свойств функций;

знать:

- ✓ графики всех изученных по программе функций и их свойства;

- ✓ графики функций с модулями и их свойства;

уметь:

- ✓ Находить значения функции, заданной формулой, таблицей, графиком, решать обратные задачи;
- ✓ Находить по графику функции промежутки возрастания, убывания, промежутки знакопостоянства, наибольшее и наименьшее значение;
- ✓ Строить графики степенной, тригонометрической, показательной, логарифмической функций, а так же функции $y = |f(x)|$, используя основные приемы построения графиков (сдвиг, растяжение, зеркальное отображение).

Успешность усвоения курса можно будет проследить по результатам самостоятельных работ. Программой предусмотрен фронтальный, групповой, взаимный и самоконтроль. Текущая диагностика результатов обучения осуществляется систематическим наблюдением педагога за практической, самостоятельной, творческой, исследовательской работой учащихся.

Формы подведения итогов: представление презентаций и рефератов, выполнение контрольной работы.

Знания, полученные на занятиях данного элективного курса, необходимы для классов физико - математического профиля для успешного построения графиков сложных функций, исследования функций и построения графиков.

Виды и формы контроля:

- индивидуальный и фронтальный опрос учащихся;
- тематические самостоятельные работы;
- контрольные работы;
- тестирование.
- реферативная работа

Учебно-тематический план

п/п	Разделы/темы	Количество часов	Формы контроля
Раздел 1. Элементарное исследование функции			
1.	Общие сведения о функции	1	Математический диктант
2.	Простейшие преобразования графиков функций	2	Презентации, самостоятельная работа
3.	Предел функции. Непрерывность функции	2	Самостоятельная работа
4.	Асимптоты графика функции	1	Самостоятельная работа
5.	Применение производной к исследованию функции	2	Самостоятельная работа
Раздел 2. Исследование сложных функций			
6.	Степенная функция	2	Самостоятельная работа
7.	Показательная и логарифмическая функции	3	Самостоятельная работа
8.	Тригонометрическая функция	2	Самостоятельная работа
9.	Решение примеров и задач на исследование различных функций	3	Итоговая контрольная работа
Итого: 18 час			

Содержание курса

1. Общие сведения о функции.

   Основное содержание:

   1) Понятие функции;
   2) Область определения и область значений функции;
   3) Четные и нечетные функции. Алгоритм исследования функции на четность;
   4) Решение задач.

2. Простейшие преобразования графиков.

   Основное содержание:

   1) Сжатие и растяжение графика вдоль осей координат;
   2) Отображение графика относительно осей координат;
   3) Параллельный перенос графика вдоль осей координат;
   4) Последовательность преобразований;
   5) Решение задач по теме «Простейшие преобразования графиков функций».

3. Предел функции в точке. Непрерывность функции.

   Основное содержание:

   1) Предел функции в точке;
   2) Точки разрыва и их классификация;
   3) Основные приемы раскрытия неопределенностей;
   4) Непрерывность функции. Свойства непрерывной функции;
   5) Непрерывность функции в точке и на интервале;

4. Асимптоты графика функции.

   Основное содержание:

   1) Наклонные асимптоты;
   2) Вертикальные асимптоты.

5. Исследование функции с помощью производной.

   Основное содержание:

1) Возрастание и убывание функции;
2) Точки экстремума. Критические и стационарные точки функции;
3) Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба функции;
4) Как искать точки максимума и минимума функции;
5) Как искать наибольшее и наименьшее значение функции;
6) Общая схема исследования функции и построение ее графика.

6. Степенная функция.

Основное содержание:

1) Понятие степенной функции. Свойства степенной функции;
2) Секущая и касательная к графику функции;
3) Построение и преобразование графиков степенной функции;
4) Решение задач по теме «Исследование степенной функции».

7. Показательная и логарифмическая функции.

Основное содержание:

1) Понятия и свойства показательной и логарифмической функций;
2) Построение и преобразование графиков показательной и логарифмической функций;
3) Решение задач по теме «Исследование показательной и логарифмической функций.

8. Тригонометрические функции.

Основное содержание:

1) Функции $y = sin\, x$, $y = cos\, x$, $y = tg\, x$, $y = ctg\, x$. Обратные тригонометрические функции. Свойства тригонометрических функций;
2) Построение и преобразование графиков тригонометрических функций;
3) Решение задач по теме «Исследование тригонометрических функций».

Самостоятельные и контрольные работы

Математический диктант по теме: «Общие сведения о функции».

Вариант 1.

1. Область определения функции - это...
2. Найдите значение функции $f(x) = -3x^2 + 1$ в точке $x_0 = -1$.
3. Найдите значение аргумента, при котором значение функции $f(x) = 2 - 3x$ равно − 4.
4. Областью определения функции $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3$ является...
5. Областью определения функции $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ является...
6. Областью определения функции $f(x) = \sqrt{x-5}$ является...
7. Укажите множество значений функции $f(x) = x^2 - 4$.
8. Является ли функция $y = \frac{-x}{x^4+1}$ нечетной?
9. Является ли функция $y = -\frac{3}{x-1}$ четной или нечетной.

Вариант 2

1. Область значений функции - это...
2. Найдите значение функции $f(x) = -2x^2 - 2$ в точке $x_0 = 2$.
3. Найдите значение аргумента, при котором значение функции $f(x) = 2x + 4$ равно 2.
4. Областью определения функции $f(x) = x^3 - x^3 + 1$ является...
5. Областью определения функции $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$ является...
6. Областью определения функции $f(x) = \sqrt{x+5}$ является...
7. Укажите множество значений функции $f(x) = -x^2 + 2$.
8. Является ли функция $y = \frac{x^2}{x^4+2}$ четной?
9. Является ли функция $y = \frac{2}{x+1}$ четной или нечетной?

Ответы к математическому диктанту по теме: «Общие сведения о функции»

Вариант 1

1. Область определения функции - это множество значений, которые может принимать аргумент.
2. −2.
3. 2.
4. Множество действительных чисел.
5. Областью определения функции $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ является $(-\infty; 2) \cup (-2; +\infty)$
6. Областью определения функции $f(x) = \overline{x - 5}$ является $[5; +\infty)$.
7. $[-4; +\infty)$.
8. Да
9. Функция не является ни четной, ни нечетной.

Вариант 2.

1. Область значений функции – это множество значений зависимой переменной, которые принимаются при всех значениях аргумента из области определения функции.
2. −10.
3. −1.
4. Множество действительных чисел.
5. $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$
6. Областью определения функции $f(x) = \overline{x + 5}$ является $[5; +\infty)$.
7. $(-\infty;\ 2]$.
8. Да
9. Функция не является ни четной, ни нечетной.

Математический диктант по теме «Простейшие преобразования графиков функций»

Вариант 1.

1. В какой четверти расположен график функции $y = \sqrt{x-4}$?
2. Найдите точку пересечения графика функции $y = 2x^2 - 1$ с осью ординат.

В заданиях 3–6 задайте формулой функцию, график которой будет получен в результате указанных преобразований.

3. Параллельный перенос графика функции $y = x^3$ на 4 единицы влево вдоль оси абсцисс.
4. Растягивание графика функции $y = x$ от оси Ox в 2 раза.
5. Симметричное отображение относительно оси Ox графика функции $y = \sqrt{x}$.
6. Параллельный перенос графика функции $y = \frac{4}{x}$ вдоль оси Ox на 2 единицы вправо и вдоль оси Oy на 3 единицы вниз.

Вариант 2.

1. В какой четверти расположен график функции $y = -\sqrt{-x-2}$?
2. Найдите точку пересечения графика функции $y = x^3$ с осью ординат.

В заданиях 3–6 задайте формулой функцию, график которой будет получен в результате указанных преобразований.

3. Параллельный перенос графика функции $y = \sqrt{x}$ на 4 единицы вверх вдоль оси ординат.
4. Сжатие графика функции $y = x$ к оси Ox в 3 раза.
5. Симметричное отображение относительно оси Oy графика функции $y = \sqrt{x}$.
6. Параллельный перенос графика функции $y = \frac{-3}{x}$ вдоль оси Ox на 3 единицы влево и вдоль оси Oy на 2 единицы вверх.

Ответы к математическому диктанту по теме «Простейшие преобразования графиков функций»

Вариант 1.

1. В I четверти.
2. $(0; -1)$
3. $y = (x + 4)^3$
4. $y = 2\ x$
5. $y = -\ \overline{x}$
6. $y = \frac{4}{x-2} - 3$

Вариант 2.

1. В III четверти.
2. $(0; 1)$
3. $y = \ \overline{x} + 4$
4. $y = \frac{1}{3}\ x$
5. $y = \ \overline{-x}$
6. $y = \frac{-3}{x+3} + 2$

Самостоятельная работа по теме «Предел функции. Непрерывность функции»

Вариант 1.

1. Найти точку разрыва функции $f(x) = \frac{1}{5x+7}$.
2. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$.

Вариант 2.

1. Найти сумму значений точек разрыва функции $f(x) = \frac{x+2}{x^2+2x-3}$.
2. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x-2}{x-2}$.

Ответы к самостоятельной работе по теме «Предел функции. Непрерывность функции».

Вариант 1.

1. Найдем область определения функции: $5x + 7 \neq 0$,

$$x \neq -\frac{1}{4}$$

Ответ: $-\frac{1}{4}$.

1. Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, за исключением точки $x = 3$. В этой точке функция имеет разрыв. Найдём односторонние пределы функции в точке $x = 3$:

$$f(3-0) = \lim_{x\to 3-0} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3-0} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3-0} (x+3) = 6$$

$$f(3+0) = \lim_{x\to 3+0} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3+0} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3+0} (x+3) = 6$$

Т.к в точке $x = 3$ односторонние пределы равны между собой, а функция в этой точке не определена, то $x = 3$ является точкой устранимого разрыва. Чтобы устранить разрыв в этой точке, необходимо доопределить функцию, положив $f(3) = 6$.

Вариант 2.

1. Найдем область определения функции: $x^2 + 2x - 3 \neq 0.$

$$x_1 \neq 1, x_2 \neq -3.$$

Далее находим сумму значений $1 + \quad -3 \quad = -2.$

Ответ: - 2.

2. Функция определена и непрерывна на всём множестве действительных чисел, кроме точки $x = 2$. В этой точке функция имеет разрыв. Найдём односторонние пределы функции при $x = 2$:

$$f \;\; 2 - 0 \;\; = \lim_{x \to 2-0} \frac{x-2}{x-2} = \lim_{x \to 2-0} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$$

$$f \;\; 2 + 0 \;\; = \lim_{x \to 2+0} \frac{x-2}{x-2} = \lim_{x \to 2+0} \frac{(x-2)}{x-2} = 1\,.$$

Так как данная функция в точке $x = 2$ имеет конечные односторонние пределы, не равные друг другу, то эта точка является точкой разрыва первого рода. Скачок функции в точке $x = 2$ равен $f \;\; 2 + 0 \;\; - f \;\; 2 - 0 \;\; = \;\; 1 - (-1) \;\; = 2.$

Самостоятельная работа по теме «Асимптоты»

Вариант 1

Найти асимптоты графика функции $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x+1}$

Вариант 2

Найти все асимптоты графика функции $f(x) = \frac{5x}{3x+2}$

Решения к самостоятельной работе по теме «Асимптоты»

Вариант 1

Решение: Область определения функции

$$D(f): x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$$

Вертикальные асимптоты: прямая $x = -1$ – вертикальная асимптота, так как:

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{x^2-3x+2}{x+1} = \left(\frac{6}{0}\right) = \infty$$

Горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+2}{x+1} = \infty$$

Горизонтальных асимптот нет.

Наклонные асимптоты $y = kx + b$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-3x+2}{x+1} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+2-x^2-x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x+2}{x+1} = -4$$

Наклонная асимптота $y = x - 4$.

Ответ: Вертикальная асимптота прямая $x = -1$

Наклонная асимптота – прямая $y = x - 4$.

Вариант 2

Решение: ОДЗ: $3x + 2 \neq 0$

$$3x \neq -2,$$

$$x \neq -\frac{2}{3}.$$

Следовательно, $x = -\frac{2}{3}$ – точка разрыва

$$\lim_{x \to -\frac{2}{3}} \frac{5x}{3x + 2} = \quad -\frac{10}{\infty} \quad = -\infty$$

Вертикальных асимптот нет

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{5}{3x + 2} = \frac{5}{\infty} = 0$$

Так как $\mathrm{k} = 0$, наклонных асимптот нет

$$b = \lim_{x \to \infty} f \;\; x \;\; - kx \;\; = \lim_{x \to \infty} \frac{5x}{3x + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{5}{3}$$

$$y = kx + b$$

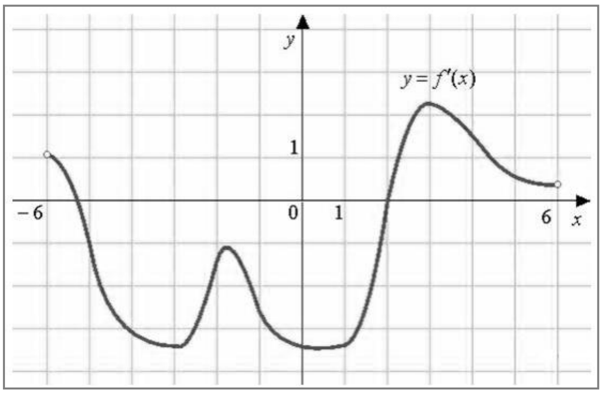
$$y = \frac{5}{3} - \text{горизонтальная асимптота}$$

Ответ: $\mathrm{y} = \frac{5}{3}$ - горизонтальная асимптота.

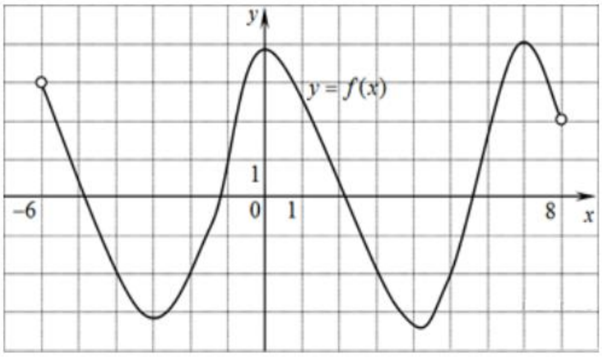
Самостоятельная работа по теме «Применение производной к исследованию функции»

Вариант 1.

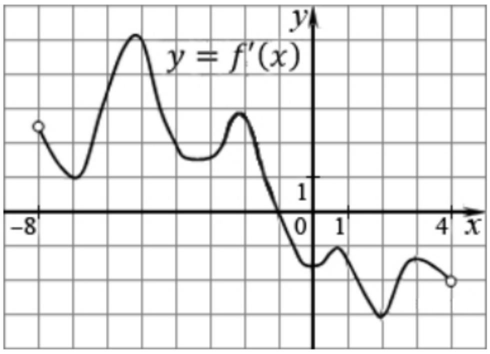
1. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6; 6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



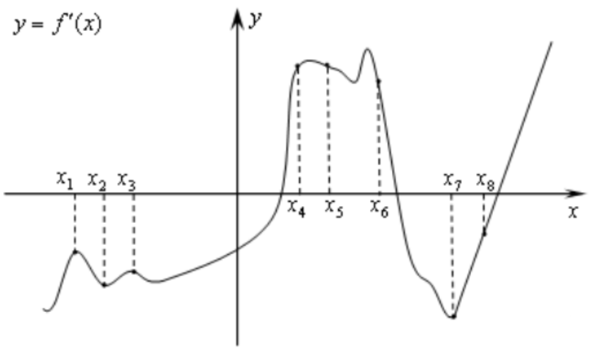
2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6;\ 8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



3. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;\ 4)$. В какой точке отрезка $-7;\ -3$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?

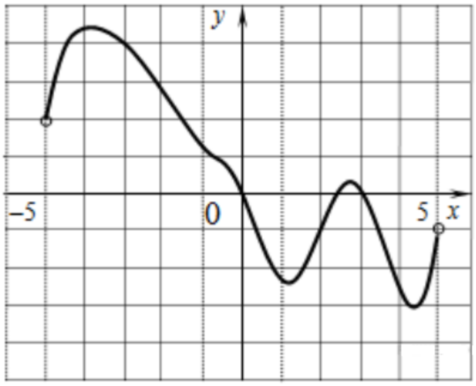


4. На рисунке изображён график $y = f'\ x$ - производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены восемь точек: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_8$. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?

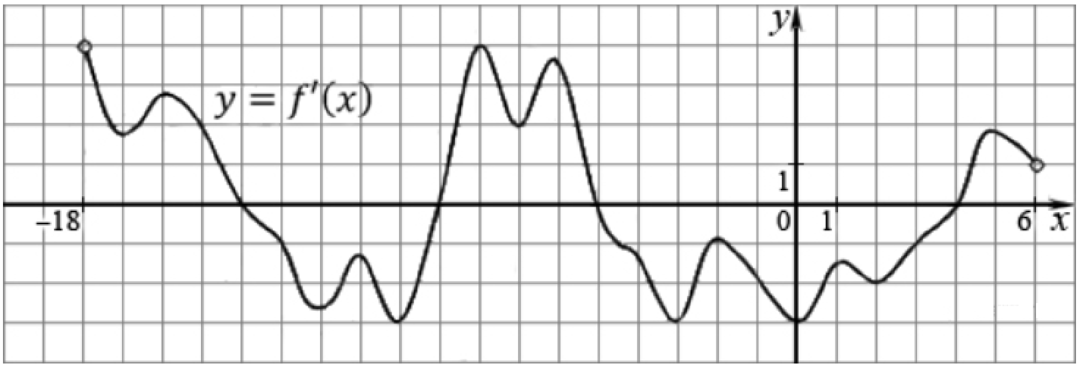


Вариант 2.

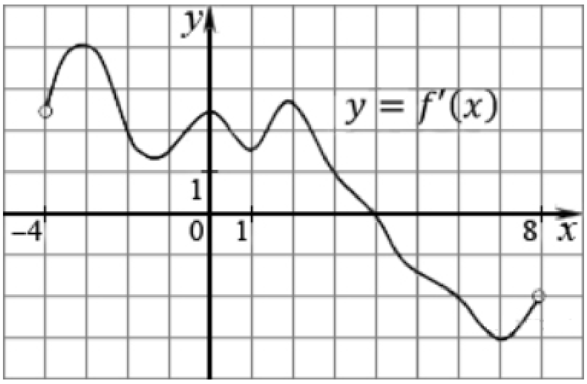
1. На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5;\ 5)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.



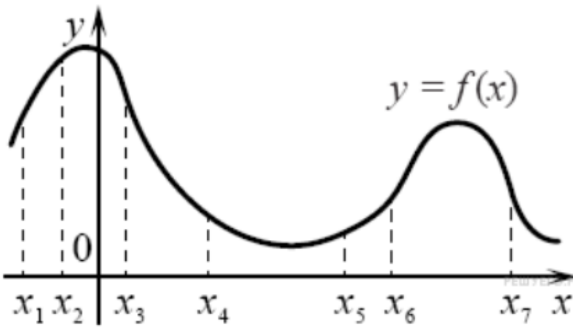
2. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-18;\ 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-13; 1]$.



3. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4; 8)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-2; 6]$.



4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



Ответы к самостоятельной работе по теме «Применение производной к исследованию функции»

Вариант 1

1. Промежутки возрастания $(-6; -5{,}2]$ и $[2; 6)$ на которых производная неотрицательна. Данные промежутки содержат целые точки $2, 3, 4$ и 5. Их сумма равна 14.

Ответ: 14.

2. Производная функции положительна на интервалах $(-3; 0)$ и $(4{,}2;\ 7)$. В них содержатся целые точки $-2, -1, 5$ и 6, всего их 4.

Ответ: 4.

3. Наименьшее значение функции достигается на левой границе отрезка, т. е. в точке -7.

Ответ: −7.

4. Производная положительна в точках $x_4, x_5 x_6$. Таких точек 3.

Ответ: 3.

Вариант 2

1. Производная функции отрицательна интервалах $(-3{,}8;\ 1{,}2)$ и $(2{,}8;\ 4{,}4)$. В них содержатся целые точки $-3, -2, -1, 0, 1, 3, 4$.

Ответ: 7.

2. На отрезке $[-13; 1]$ функция имеет одну точку минимума $x\ =\ -9$.

Ответ: 1

3. На отрезке $[-2;\ 6]$ график производной пересекает ось абсцисс, производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, точка 4 является точкой экстремума.

Ответ: 4.

4. Производная функции отрицательна в точках x_3, x_4, x_7 - всего 3 точки.

Ответ: 3.

Самостоятельная работа по теме «Степенная функция»

Вариант 1.

1. Найдите точки минимума и максимума функции

$$y = x^3 - 48x + 17.$$

2. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $0; 4$.

3. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6x^2$ на отрезке $-3; 3$.

Вариант 2.

1. Найдите точки минимума и максимума функции

$$y = x^3 - 2x^2 + x + 3.$$

2. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ на отрезке $1; 4$.

3. Найти наибольшее значение функции $y = 9x^2 - x^3$ на отрезке $2; 10$.

Решения для самостоятельной работы по теме «Степенная функция»

Вариант 1

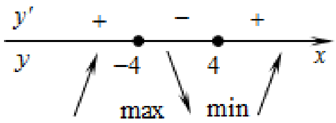
1. Решение: Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) = 3(x - 4)(x + 4).$$

Найдем нули производной:

$$3(x - 4)(x + 4) = 0 \quad \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Ответ: Искомая точка максимума $x = -4$,

Искомая точка минимума $x = 4$.

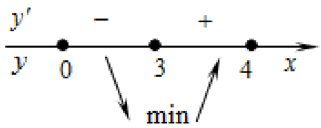
2. Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x + 3)(x - 3).$$

Найдем нули производной:

$$\left\{\begin{array}{l} 3(x + 3)(x - 3), \\ 0 \le x \le 4 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 3, \end{array}\right. \\ 0 \le x \le 4 \end{array}\right. \quad x = 3.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 3$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(3) = 27 - 27 \times 3 = 54.$$

Ответ: -54.

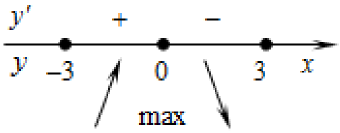
3. Решение: Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 12x = 3x(x-4).$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} 3x(x-4) = 0, \\ -3 \le x \le 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 4, \end{array}\right. \\ -3 \le x \le 3 \end{cases} \quad x = 0.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 0$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(0) = 0.$$

Ответ: 0.

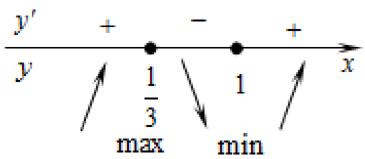
Вариант 2

1. Решение: Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 4x + 1.$$

Найдем нули производной: $3x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \frac{1}{3}. \end{array}\right.$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 1$.

Ответ: 1.

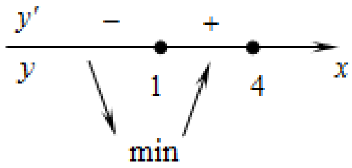
2. Решение: Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 4x + 1.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{matrix} 3x^2 - 4x + 1 = 0, \\ 1 \le x \le 4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x = 1, \\ x = \dfrac{1}{3}, \\ 1 \le x \le 4 \end{matrix} \qquad x = 1.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 1$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

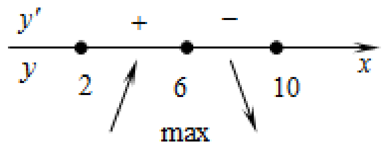
$$y\ \ 1\ \ = 1 - 2 + 1 + 3 = 3.$$

Ответ: 3.

3. Решение: Найдем производную заданной функции:

$$y' = 18x - 3x^2 = 3x(6 - x).$$

Найдем нули производной: $x = 0$ и $x = 6$ на заданном отрезке лежит только число 6. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 6$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y\ \ 6\ \ = 9 \times 36 - 6 \times 36 = 324 - 216 = 108.$$

Ответ: 108.

Самостоятельная работа по теме «Показательная и логарифмическая функции»

Вариант 1

1. Найдите наименьшее значение функции $y = 3x - \ln(x+3)^3$ на отрезке $[-2{,}5;\ 0]$.

2. Найдите точку максимума функции $y = 2x^2 - 13x + 9\ln x + 8$.

3. Найдите наименьшее значение функции $e^{2x} - 6e^x + 3$ на отрезке $1; 2$.

Вариант 2

1. Найдите наименьшее значение функции.
$y = 4x^2 - 10x + 2\ln x - 5$ на отрезке $[0{,}3;\ 3]$.

2. Найдите точку максимума функции $y = 0{,}5x^2 - 7x + 12\ln x + 8$.

3. Найдите наименьшее значение функции $e^{2x} - 4e^x + 6$ на отрезке $0; 3$.

Ответы и решения к самостоятельной работе по теме «Показательная и логарифмическая функции»

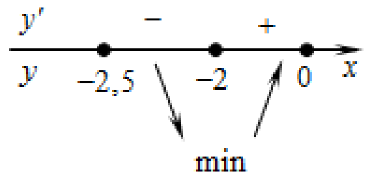
Вариант 1

1. Решение. $y'(x) = 3 - \frac{3}{x+3}$.

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 3 - \frac{3}{x+3} = 0, \\ -2{,}5 \le x \le 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x+3} = 1, \\ -2{,}5 \le x \le 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2, \\ -2{,}5 \le x \le 0 \end{cases} \quad x = -2.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -2$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение: $y(-2) = -2 \times 3 - \ln 1 = -6$.

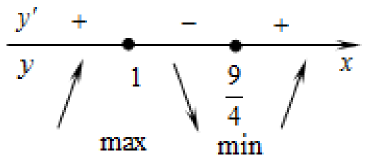
Ответ: -6.

2. Решение. Область определения функции - открытый луч $(0; +\infty)$.

$$y' = 4x - 13 + \frac{9}{x}.$$

Нули производной: $4x - 13 + \frac{9}{x} = 0 \quad 4x^2 - 13x + 9 \quad \begin{matrix} x = 1, \\ x = \frac{9}{4}. \end{matrix}$

Найденные точки лежит на луче $(0; +\infty)$.

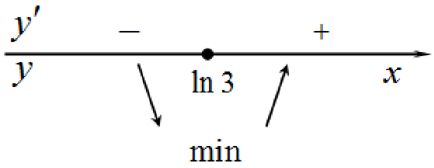


Ответ: Искомая точка максимума $x = 1$.

3. Решение. $y' = 2e^{2x} - 6e^{x} = 2e^{x}(e^{x} - 3)$.

Найдем нули производной: $2e^{x}(e^{x} - 3) = 0 \quad e^{x} = 3 \quad \ln 3$.

Отметим на рисунке нули производной и поведение функции на заданном отрезке:



Наименьшим значением функции на заданном отрезке является ее значение в точке минимума.

$$y(\ln 3) = e^{2\ln 3} - 6e^{\ln 3} + 3 = -6.$$

Ответ: –6.

Вариант 2.

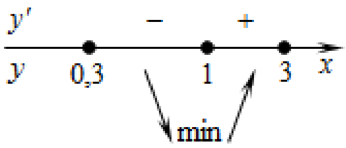
1. Решение.

Найдем производную заданной функции: $y' = 8x - 10 + \frac{2}{x}$.

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 8x - 10 + \dfrac{2}{x} = 0, \\ 0{,}3 \le x \le 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = 0{,}25, \\ x_2 = 1, \end{array}\right. \\ 0{,}3 \le x \le 3 \end{cases} \qquad x = 1.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 1$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке.

$$y(1) = 4 - 10 - 5 = -11.$$

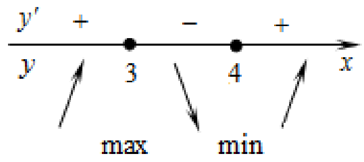
Ответ: –11.

2. Решение.Область определения функции - открытый луч $(0; +\infty)$.

Найдем производную заданной функции: $y' = x - 7 + \frac{12}{x}$.

Нули производной: $x - 7 + \frac{12}{x} = 0 \quad x^2 - 7x + 12 = 0 \quad \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 4. \end{array}\right.$

Найденные точки лежит на луче $(0; +\infty)$.



Искомая точка максимума $x = 3$.

Ответ: 3.

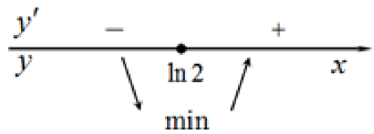
3. Решение.Найдем производную заданной функции:

$$y' = 2e^{2x} - 4e^{x} = 2e^{x}(e^{x} - 2).$$

Нули производной на заданном отрезке:

$$2e^{x}(e^{x} - 2) = 0 \quad e^{x} = 2 \quad x = \ln 2.$$

Отметим на рисунке нули производной и поведение функции на заданном отрезке:



Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является ее значение в точке минимума.

$$y(\ln 2) = e^{2\ln 2} - 4e^{\ln 2} + 6 = 2^{2} - 8 + 6 = 2.$$

Ответ: 2.

Самостоятельная работа по теме «Тригонометрические функции»

Вариант 1

1. Найдите наименьшее значение функции $y = 9\cos x + 14x + 7$ на отрезке $0; \frac{3\pi}{2}$.

2. Найдите наибольшее значение функции $y = 3tg\,x - 3x + 5$ на отрезке $-\frac{\pi}{4}; 0$.

3. Найдите точку максимума функции $y = \ 2x - 1\ \cos x - 2\sin x + 3$ принадлежащую промежутку $0; \frac{\pi}{2}$.

Вариант 2

1. Найдите точку максимума функции $y = 5tg\,x - 5x + 6$ на отрезке $0; \frac{\pi}{4}$.

2. Найдите наибольшее значение функции $y = 7\cos x + 16x - 2$ на отрезке $-\frac{3\pi}{2}; 0$.

3. Найдите наименьшее значение функции $y = 13x - 9\sin x + 9$ на отрезке $0; \frac{\pi}{2}$.

Ответы к самостоятельной работе по теме «Тригонометрические функции»

Вариант 1

1. Решение.

Найдем производную заданной функции $y' = -9\sin x + 14$. Найденная производная положительна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является возрастающей. Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является

$$y\ \ 0\ \ = 9\cos 0 + 0 + 7 = 16$$

Ответ: 16

2. Решение.

Найдем производную заданной функции

$$y' = \frac{3}{cos^2\, x} - 3 = 3\ \ \frac{1}{cos^2\, x} - 1\ \ = 3tg^2 x.$$

Найденная производная неотрицательна на заданном отрезке, заданная функция возрастает на нем, поэтому наибольшим значением функции на отрезке является

$$y\ \ 0\ \ = 3tg\, 0 - 0 + 5 = 5$$

Ответ: 5

3. Решение.

$y' = 2\cos x +\ \ 1 - 2x\ \ \sin x - 2\cos x =\ \ 1 - 2x\ \ \sin x.$

На заданном промежутке (первая четверть без граничных точек) синус не обращается в нуль и принимает только положительные значения. Пожэтому единственный нуль производной – 0,5.

Определим знаки производной функции: она положительна при $x < 0{,}5$ и отрицательна при $x > 0{,}5$. Поэтому искомая точка максимума - 0,5.

Ответ: 0,5.

Вариант 2

1. Решение.

Найдем производную заданной функции

$$y' = \frac{5}{cos^2x} - 5 = 5\ \ \frac{1}{cos^2x} - 1\ \ = 5tg^2x.$$

Найденная производная неотрицательна на заданном отрезке, заданная функция возрастает на нем, поэтому наименьшим значением функции на отрезке является

$$y\ \ 0\ \ = 5tg\,0 - 5 \times 0 + 6 = 6.$$

Ответ: 6.

2. Решение.

Найдем производную функции $y' = -7\sin x + 16$. Уравнение $y' = 0$ не имеет решений, производная положительна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является возрастающей. Следовательно, наибольшим значением функции на заданном отрезке является

$$y\ \ 0\ \ = 7\cos 0 + 16 \times 0 - 2 = 5.$$

Ответ:5.

3. Решение.

Найдем производную заданной функции: $y' = 13 - 9\cos x.$ Уравнение $y' = 0$ не имеет решений, производная положительна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является возрастающей.

Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является

$$y\ \ 0\ \ = 13 \times 0 - 9\sin 0 + 9 = 9.$$

Ответ: 9.

Итоговая контрольная работа

Вариант 1

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = \frac{x+6}{x^2+13}$ на отрезке $-5; 5$.

2. Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{x}{(x-1)^2}$.

Вариант 2

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = \frac{x}{2} + \cos x$ на отрезке $0; \pi$.

2. Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{x^3+16}{x}$.

Вариант 3

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = \frac{x-3}{x^2+16}$ на отрезке $-5; 10$.

2. Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{x^3-1}{4x^2}$.

Вариант 4

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = \frac{x+3}{x^2+7}$ на отрезке $-3; 7$.

2. Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{x-1}{x^2-2x}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Провести полное исследование функций методами дифференциального исчисления и построить графики:

1.1 а) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$;

б) $y = e^{x^2-2x}$; в) $y = sin\, x + \frac{1}{3} sin\, 3x$;

1.2 а) $y = (x+1)^{2/3}$;

б) $y = 1 - xe^{-\frac{1}{x}}$; в) $y = \ln\cos x$

1.3 а) $y = (x-3)\sqrt{x}$

б) $y = xe^{\frac{1}{x}}$. в) $y = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$

1.4 а) $y = (x+1)(x+2)^2$

б) $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$ в) $y = \cos x - \ln\cos x$

1.5 а) $y = \frac{x(x-1)}{x^2+1}$

б) $y = \frac{x}{e^x}$ в) $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$

1.6 а) $y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$

б) $y = \frac{ln^2 x}{x}$ в) $y = \sin^4 x + cos^2 x$

1.7 а) $y = (x+2)^{\frac{2}{3}} - (x-2)^{\frac{2}{3}}$

б) $y = xe^{\frac{1}{x-2}}$ в) $y = arcsin\frac{2x}{1+x^2}$

1.8 а) $y = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$

б) $y = x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$ в) $y = \sin x \times cos^2 x$

1.9 а) $y = \frac{x}{x^2+1}$

б) $y = \frac{e^x}{1+x}$ в) $y = sinx + cos^2 x$

1.10 а) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ б) $y = \frac{e^x}{1+x}$

в) $y = \ 7 + 2\, cosx\ \ sinx$

2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в заданном отрезке:

2.1 $y = \frac{3}{1+x^2},\ x \in\ -1; 2$

2.2 $y = x^2\ \ 3 - x\ \ ^2,\ x \in\ \ 0; 1$

2.3 $y = \sqrt{3 - 2x},\ x \in\ -1; 1$

2.4 $y = x^4 + 2x^3 + x^2 + 1, x \in [-2; 1]$

2.5 $y = sinx^2,\ [-\pi; 0]$

2.6 $y = -\frac{5}{\overline{1+x^2}},\ x \in\ -2; 1$

2.7 $y = \sqrt{64 - x^2},\ x \in [-5; 1]$

2.8 $y = cosx - x,\ x \in\ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$

2.9 $y = \frac{x-2}{x+2},\ x \in\ \ 0; 5$

2.10 $y = -2\ cosx^2,\ x \in [0;\ \sqrt{\pi}]$

2.11 $y = \frac{x^2}{2-x},\ x \in\ \ 3; 5$

2.12 $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x,\ x \in\ -2; 4$

2.13 $y = arctgx - x,\ x \in\ -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}$

2.14 $y = cos\ 2x - x,\ x \in\ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$

2.15 $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x},\ x \in\ \ 0; 5$

2.16 $y = e^x\ \ x - 2\ \ ,\ x \in\ \ 0; 2$

2.17 $y = \frac{x^2}{2-x^2},\ x \in [-1; 1]$

2.18 $y = x^2 - \ln x\,,\ x \in\ \frac{1}{3}; 5$

2.19 $y = arccosx - x,\ x \in\ -\frac{1}{2}; 0$

2.20 $y = sin\ 2x,\ x \in [0; \pi]$

Список рекомендуемой литературы для учителейи обучающихся

1. Макарычев, Ю. Н. Дополнительные главы к школьному учебнику / Ю. Н.Макарычев, Н. Г. Миндюк, - М.: «Просвещение», 2014г. – 224 с.

2. Крамор, В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начала анализа, - М.: Просвещение», 2004 г.

3. Ершов, Л. В. Построение графиков функций. Книга для учителя. / Ершов Л.В., Райхлист Р. Б. – М.: Просвещение, 2005 г.

4. Гилев, В. Г. Исследование алгебраических функций без использования производной, Москва «Илекса», 2014, из серии - Математика: элективный курс.

5. Мерзляк, А. Г. Алгебраический тренажёр. / А. Г. Мерзляк и др.- М.:«Илекса», 2011 г.

6. Крамор, В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа / В. С. Крамор – М.: «Просвещение», 2009 г.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной дипломной работе была разработана теоретически обоснованная методика обучения исследованию функций и построению графиков элементарных функций для обучающихся старших классов средних общеобразовательных учреждений.

Систематизированы и углублены теоретические и практические знания по теме «Исследование функций и построение графиков».

Изучены и проанализированы учебники алгебры и начала математического анализа для выявления представленной в них методики преподавания темы «Исследование функций и построение графиков». Проведенный анализ позволяет сделать следующий вывод: в средней школе недостаточное внимание уделяется решению задач на исследование функции с применением производной.

Изучено применение производной к исследованию функции для нахождения возрастания и убывания функции, экстремумов функции, выпуклости и точек перегиба.

Изучены методы преобразования графиков функций, опирающиеся на простейшие приемы (растяжение, сжатие, параллельный перенос, отображение). Свободное владение техникой построения графиков часто помогает решить многие задачи и порой является единственным средством их решения.

Разработана программа элективного курса «Задачи на исследование функций и построение графиков» направленного на подготовку к ЕГЭ обучающихся 11 классов средних общеобразовательных учреждений.

Рассмотрев задачи на применение производной, которые предлагаются обучающимся для подготовки к сдаче ЕГЭ, мы можем сделать вывод, что при решении данных задач обучающимися часто допускаются некоторые ошибки, которые в итоге приводят к менее высоким результатам. А именно: ошибки, свзанные с непониманием геометрического смысла производной, связанные с арифметическими действиями, неуверенным владением алгоритмом вычисления наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции, неумение пользоваться основными правилами дифференцирования и т.д. А значит, при подготовке к ЕГЭ, учителям необходимо обращать внимание школьников на данные типичные ошибки.

Результаты данной дипломной работы могут быть использованы как методическое пособие для учителей в работе с обучающимися на уроках и факультативах, а также являться справочным материалом для обучающихся при самостоятельной подготовке к экзаменам. Материалы работы могут использоваться студентами - практикантами в период педагогической практики.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акманова, С. В. Обучение Старшеклассников исследованию функций и построению их графиков на основе деятельностного подхода / С.В. Акманова, Р. Р. Каюмов. - Магнитогорск, Изд-во МГУ, 2012. – 147 с.

2. Алимов, Ш. А. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб.для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. Уровни / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева и др.– 3-е изд. -М.: Просвещение, 2016. - 463 с.

3. Алимов, Ш. А. Алгебра: Учеб.для 9 кл. общеобразоват. учреждений / Ш. А. Алимов, Ю. А. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. - 2-е изд. – М.: Просвещение, 1995. - 223 с.

4. Башмаков, М. И. Алгебра и начала анализа: Учеб.для 10 – 11 кл. сред. шк. / М. И. Башмаков. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 1993. – 351 с.

5. Беляева, В. И. Исследование функции одной переменной и построение ее графика с применением современных интернет – ресурсов / В.И. Беляева, С. Г. Майоркин – СПб.: Мифрил.- 2015. –55 с.

6. Виленкин, Н. Я. Задачник по курсу математического анализа. Учеб.пособие для студентов заочн. отделений физ.–мат. фак-тов пединститутов. Ч.1. / Н. Я. Виленкин. - М.: Просвещение, 1971. – 343 с.

7. Гриценко, Л. В. Пименение производной к исследованию функции и построению графика: Учеб.пособие / Л. В. Гриценко, Г. С. Костецкая. - Ростов-на-Дону.: Северо-Кавказский филиал МТУ, 2013. - 49 с.

8. Демидович, Б. П. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов: учеб.пособие. / Б. П. Демидович. - М.: АСТ; Астрель, 2007. - 495 с.

9. Дёмина, Т. Ю. Исследование функции на монотонность. Экстремумы функции / Т. Ю. Дёмина– Математика в школе № 9-2009. – 12 с.

10. Игнаткина, Л. А. Применение производных к исследованию функций: Учебн. пособие. / Л. А, Игнаткина, Е. И, Томина. - Самара, Изд-во СГПУ, 2005. - 147 с.

11. Ильин, В. А. Основы математического анализа: учебник для студентов физ. специальностей. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк - 6-е изд., стер. - М.: Физматлит, 2005. - 616 с.

12. Когаловский, С. Р. Производная и задачи элементарной математики / С. Р. Когаловский, В. В. Солдатова. – Математика в школе №3, - М.: «Школьная Пресса» 2012. - 44-49 с.

13. Колмогоров, А. Н. Алгебра и начала анализа: Учеб.для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др. -14-е изд. – М.: Просвещение, 2004. - 384 с.

14. Кошелев, В. Н. Дифференцирование. Исследование функции. Учеб.пособие для студентов. / В. Н. Кошелев, Б. В. Лисин. - Нижний Новгород, Изд-во Нижегородского университета, 2011. – 183 с.

15. Крейн, С. Г. Математический анализ элементарных функций: учеб.пособие. / С. Г. Крейн, В. Н. Ушакова. – М.: Гос. Изд-во фих.-мат. литр., 1963. – 168 с.

16. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа: учебник для втузов: в 3 т. Т. 1./ Л. Д. Кудрявцев. 6-е изд., перераб. - М.: Юрайт, 2012. - 702 с.

17. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-111 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А. Г. Мордкович. - 14-е изд., стер. - М.: Мнемозина, 2013. - 400 с.

18. Мордкович, А. Г. Алгебра. 9 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений/ А. Г. Мордкович – 2-е изд. – М.: Мнемозина, 2000. – 191 с.

19. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Учеб.: В 2-х т. Т.1 / Н. С. Пискунов. – СПб: Мифрил. Гл. ред. физ. – мат. лит., 1996. – 416 с.

20. Шарыгин, И. Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 11 кл. сред. шк. /И. Ф. Шарыгин, В. И. Голубев- М.: Просвещение, 1991.- 384 с.

21. РЕШУ ЕГЭ. Общеобразовательный портал для подготовки к экзаменам, математика профильный уровень. URL: https://math-ege.sdamgia.ru/?redir=1 (дата обращения 20.04.2018).

22. Асимптоты графика функции. URL: http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_8_25.php (дата обращения 11.03.2018).

23. Математическое бюро URL: https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=maissl (дата обращения 27.03.2018).

24. Математика 24 https://математика24.рф/kak-najti-asimptoty-funkcii.html (дата обращения 20.04.2018).

25. Павел Бердов. Репетитор по математике URL: https://www.berdov.com/ege/extremum/ (дата обращения 06.04.2018).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Простейшие преобразования графиков функций

1.1. Последовательность преобразований

Определение. Линейным преобразованием функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ называется преобразование самой функции и/или ее аргумента к виду $\boldsymbol{y = Af\ \ kx + b\ \ + D}$, а также преобразование, содержащее модуль аргумента и/или функции.

Последовательность преобразований графиков:

Пусть задан график функции$\boldsymbol{y = f(x)}$ и нужно построить график функции $\boldsymbol{y = m \cdot f(kx + l) + n}$, где $\boldsymbol{k, l, m, n}$ - числа.

1. Записываем формулу функции в виде $\boldsymbol{y = m \cdot f(k \cdot (x + \frac{l}{k}))}$, т.е. выносим за скобки коэффициент при х в аргументе функции.

Замечание. Во избежание ошибок при построении графиков, подчеркнем, что величина сдвига вдоль оси Ox определяется тем числом, которое прибавляется непосредственно к аргументу x, а не к аргументу kx. Поэтому для нахождения этой константы выражение $kx + l$ сначала преобразуем к виду $k \cdot\ \ x + \frac{l}{k}$.

2. Производим сжатие с коэффициентом k вдоль оси Ox к оси Oy. (Если $k < 1$, то получится растяжение от оси Oy.)
3. Если $k < 0$, то симметрично отображаем график относительно оси Oy.
4. Осуществляем параллельный перенос (сдвиг) полученного графика на $\frac{l}{k}$ единиц влево или вправо (в зависимости от знака, для положительного числа влево).
5. Производим растяжение с коэффициентом m от оси Ox (вдоль оси Oy). (Если $m < 1$, то получится сжатие к оси Ox.)

6. Если $m < 0$, то симметрично отображаем график относительно оси Ox.
7. Осуществляем параллельный перенос (сдвиг) полученного графика на n единиц вверх или вниз (в зависимости от знака, при $n > 0$ вверх).

2.1. Сжатие и растяжение графика вдоль осей координат

Сжатие и растяжение графика вдоль оси ординат

$$f(x) \to A \cdot f(x)$$

Для построения графика функции $y = A \cdot f(x)$ следует:

1. Построить график функции $y = f\ x$;

2. Увеличить его ординаты в A раз при $A > 1$ (произвести растяжение графика вдоль оси ординат) или уменьшить его ординаты в $\frac{1}{A}$ раз при $A < 1$ (произвести сжатие графика вдоль оси ординат);

3. Полученный график является графиком функции $y = A \cdot f(x)$ (Рис.1.1).

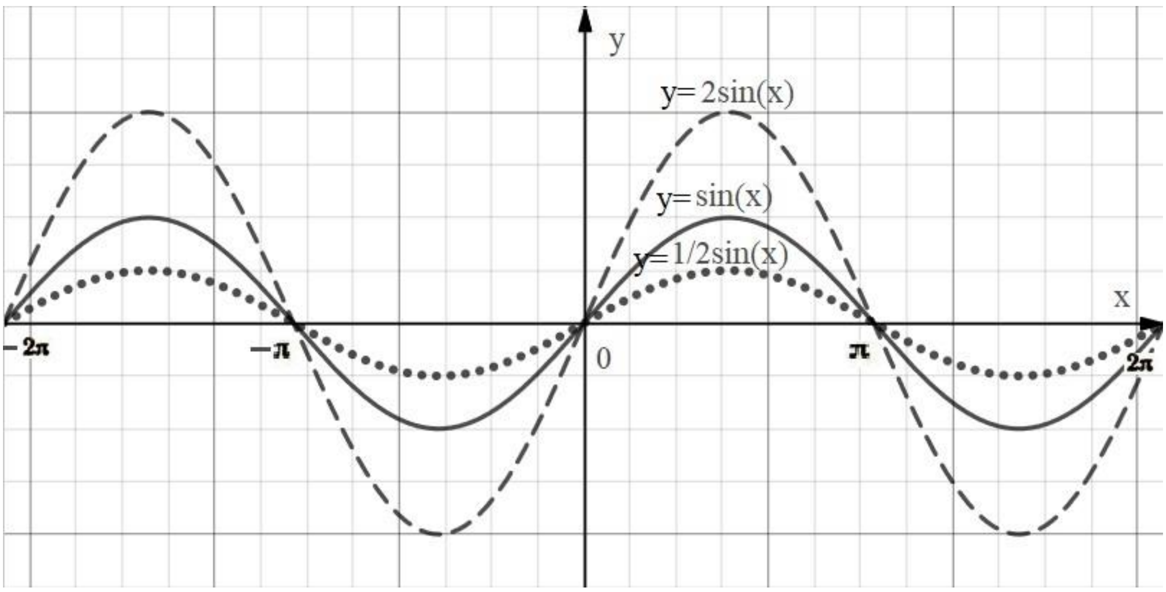


Рис. 1.1Сжатие (растяжение) графика вдоль оси ординат

Сжатие и растяжение графика вдоль оси абсцисс

$$f(x) \to f(\omega x)$$

Для построения графика функции у $=\ f(\omega x)$ следует:

1. Построить график функции $y = f(x)$
2. Уменьшить его абсциссы в ω раз при $\omega > 1$ (произвести сжатие графика вдоль оси абсцисс) (Рис.1.2.) или увеличить его абсциссы в $\frac{1}{\omega}$ раз при $\omega <\ 1$ (произвести растяжение графика вдоль оси абсцисс) (Рис1.3.).
3. Полученный график является графиком функции $y = f(\omega x)$.

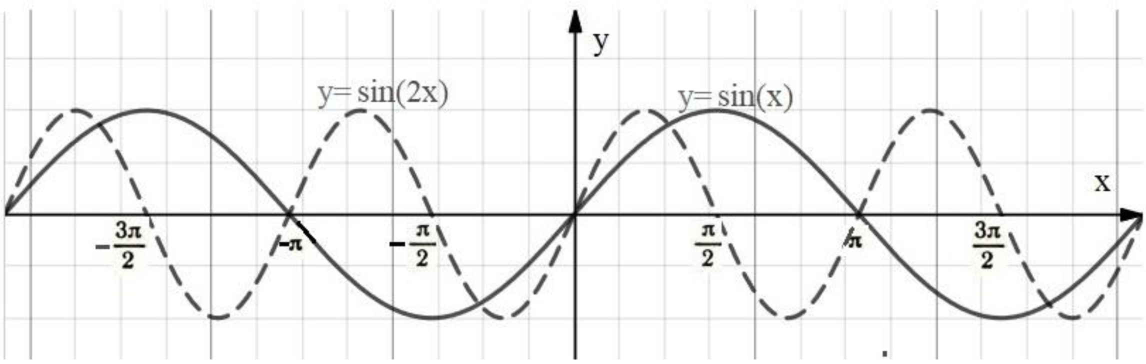


Рис. 1.2Сжатие (растяжение) графика $y = sin(x)$ вдоль оси абсцисс

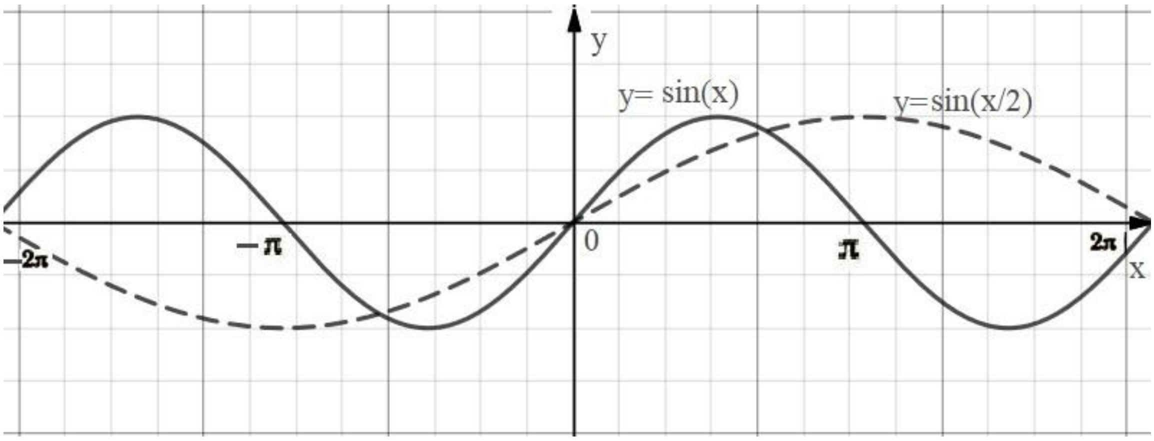


Рис. 1.3 Растяжение графика $y = sin(x)$ вдоль оси абсцисс

2.2. Симметричное отображение графика относительно осей координат

График функции $y = -f(x)$ получается симметричным отображением графика $y = f(x)$ относительно оси Ox.

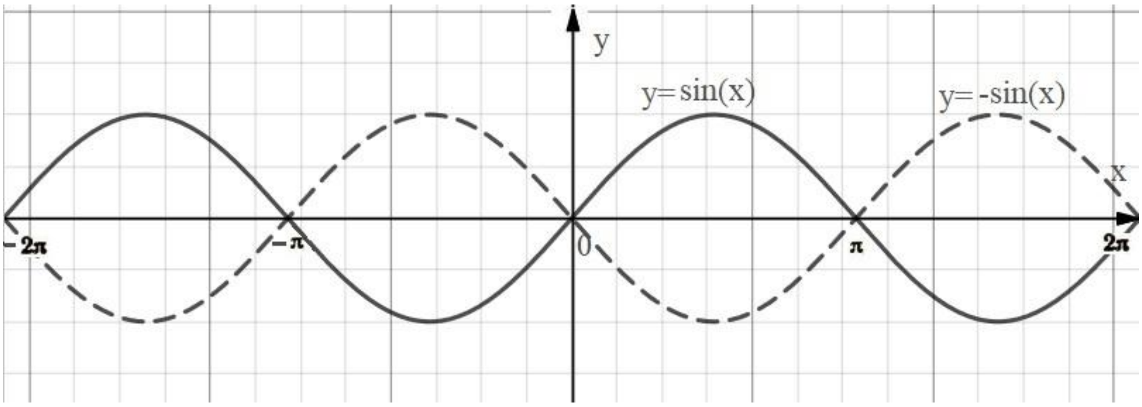


Рис. 1.4 Отображение графика $y = sin(x)$ относительно оси Ox

График функции $y = f(-x)$ получается симметричным отображением графика $y = f(x)$ относительно оси Oy.

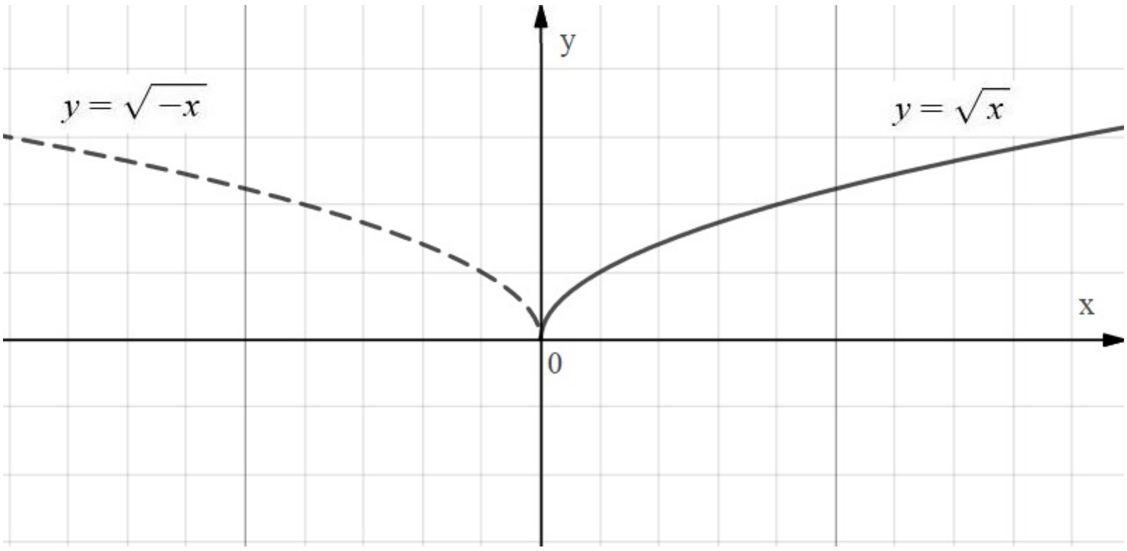


Рис.1.5 Отображение графика $y = \sqrt{x}$ относительно оси Oy

График функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: часть графика функции $y = f(x)$, лежащая над осью Ox и на оси, остается без изменений, а часть графика, лежащая под осью Ox, отражается симметрично относительно оси Ox на верхнюю полуплоскость.

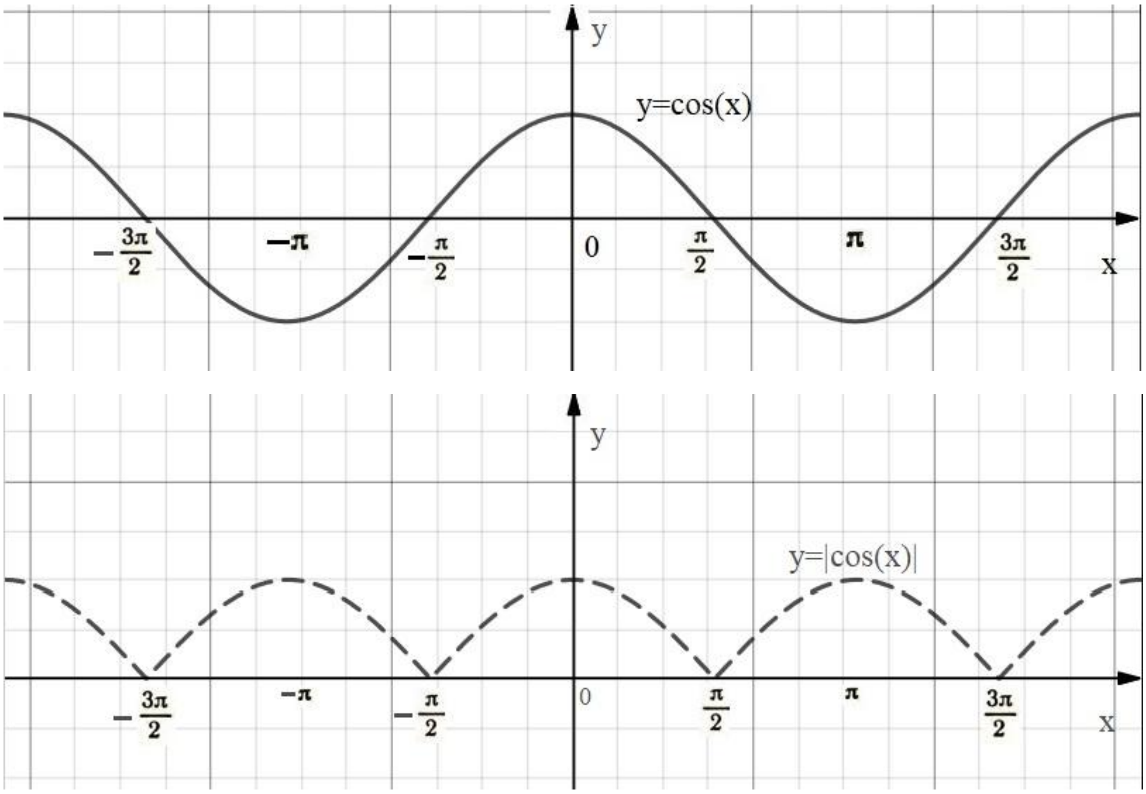


Рис.1.6 Отражение графика функции $y = \ f \ x$

График функции $y = f(\ x\ )$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: часть графика функции $y = f(x)$, соответствующая неотрицательным значениям аргумента $(x \geq 0)$, остается без изменений, а отрицательным значениям аргумента будет соответствовать график, полученный путем симметричного относительно оси $0y$ отображения части графика, оставленной без изменений.

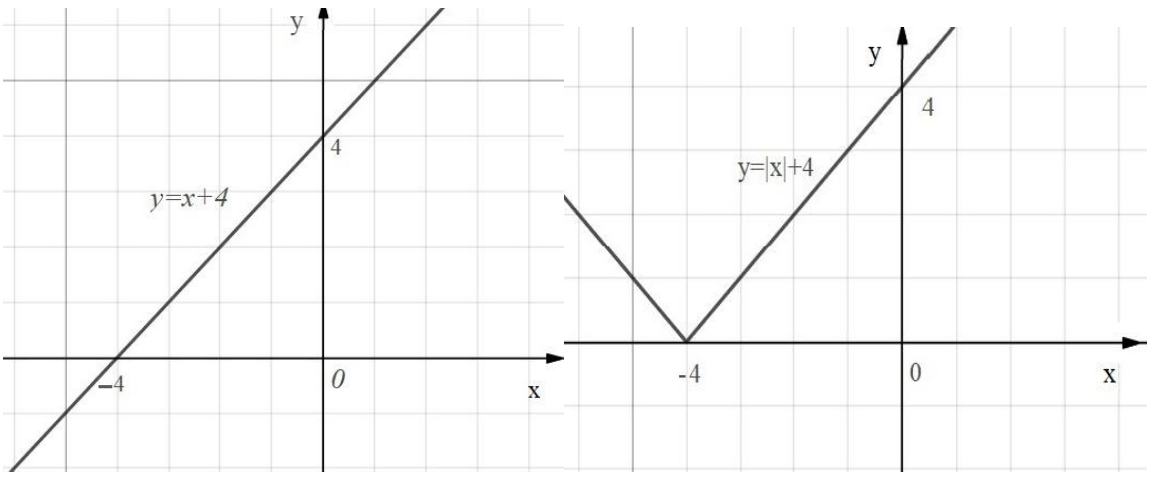


Рис.1.7 Отражение графика функции $y = f(\ x\ )$

2.3. Параллельный перенос графика вдоль осей координат

Параллельный перенос графика функции вдоль оси Оу.

График функции $y = f(x) + B$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ в положительном направлении вдоль оси Oy на расстояние В, если В > 0 и в отрицательном направлении вдоль оси Oy, если $B < 0$ (Рис. 1.8).

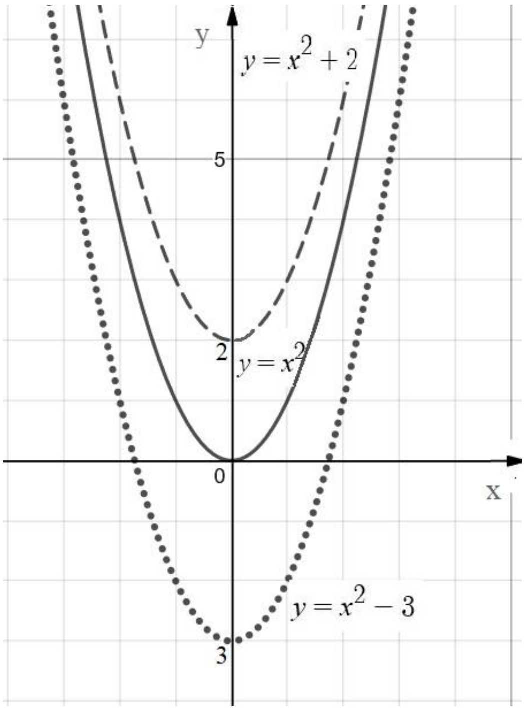


Рис.1.8 Параллельный перенос графика функции вдоль оси Oy

Параллельный перенос графика функции вдоль оси Ox.

График функции $y = f(x + b)$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ в положительном направлении вдоль оси $0x$ на расстояние b, если $b < 0$ и в отрицательном направлении вдоль оси $0x$, если $b > 0$.

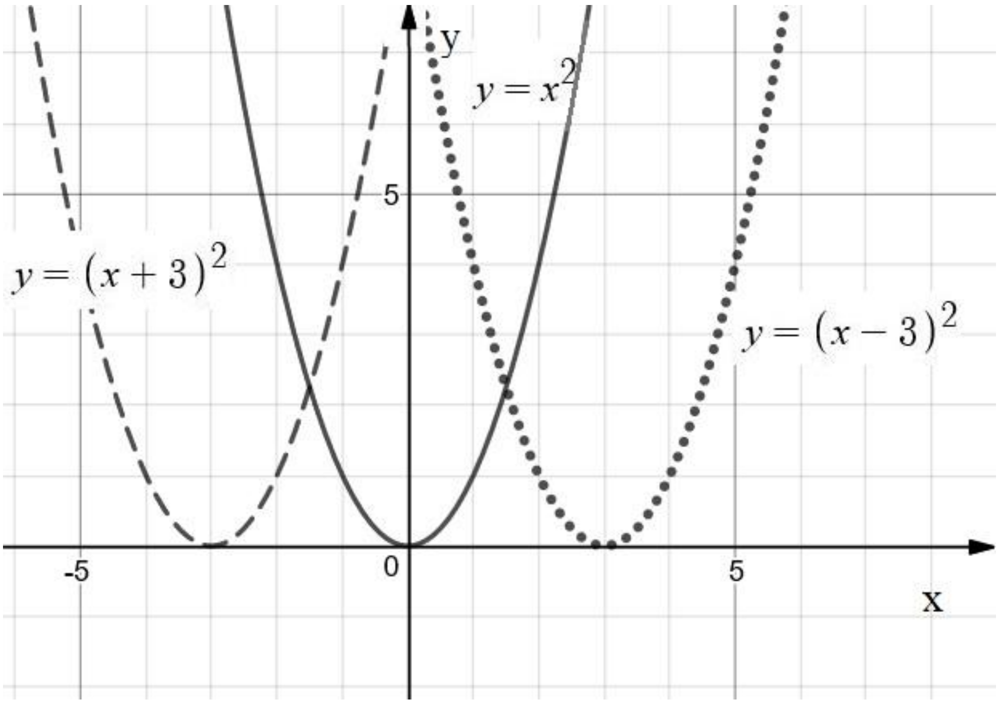


Рис.1.8 Параллельный переносграфика функции вдоль оси Ox