ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

ИСТОРИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ, РАЗВИТИЯ И ФОРМИРОВАНИЯ ПОНЯТИЯ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 44.03.01, Педагогическое образование, профиль математика
очной формы обучения, группы 02041402
Верстовой Надежды Анатольевны

Научный руководитель
ст. препод. кафедры
математики
Мандрика Г.В.

БЕЛГОРОД 2018

Оглавление

Введение

Актуальность. Большинство применений арифметики связано с практической деятельностью людей. Обыкновенные дроби - очень необычные числа, начиная с их непривычной записи и заканчивая сложными правилами действий с ними.

Обыкновенные дроби - это неотъемлемая часть нашей жизни. Как часто мы сталкиваемся с ними? Уже в детстве мы встречаемся не только с целыми предметами, но и с его составными частями. К примеру, когда кушаем апельсин, разделенный на дольки, или же когда мы делим шоколадку на всех членов семьи. Это для ребенка своего рода игра, которая позволяет показать возможность дробления предмета на равные доли, учить видеть части в едином целом предмете, выявляет отношение целого и части уже с раннего возраста. Детьми мы не понимали, собственно, что когда брали дольку апельсина, что это уже доля от целого.

Также дроби встречаются и в профессиях. Например, поварам необходимы дроби для соблюдения пропорции при приготовлении блюда. Но сначала нужно купить определенное количество продуктов и рассчитать пропорции ингредиентов в составе блюда, которое впоследствии нужно умело поделить на порции. В этом нам, несомненно, помогут дроби. В различных рецептах приготовления часто требуется взять $\frac{1}{3}$ стакана сахара или $\frac{1}{2}$ чайных ложки соды и т. д.

С понятием обыкновенной дроби в школе мы знакомимся в 5 классе. Для нас обыкновенные дроби становятся необыкновенными. Тем более дроби эти имеют замечательную историю происхождения. Они пришли к нам, преодолев многие варианты записи разных народов мира.

Необходимость в дробных числах возникла у человека на ранней стадии развития. Наряду с потребностью считать предметы у людей с античных времён появилась потребность измерять длину, площадь, объём, время и иные величины, а также вести расчеты за купленные или проданные товары. Впрочем, для данных целей натуральных чисел оказалось недостаточно. Результат измерений или стоимость товара не всегда удавалось выразить натуральным числом, приходилось учитывать и части, доли употребляемой меры. Чтобы в подобной ситуации точно выразить результат измерения, необходимо было расширить запас чисел, введя числа, отличные от натуральных. Это и привело к возникновению дробных чисел [10,12]. В средние века учение о дробях считалось самым трудным разделом арифметики. Римский оратор и писатель Цицерон говорил: «Без знаний дробей никто не может признаваться знающим арифметику». Нелегко усваивались обыкновенные дроби. Вообще дроби считаются самым трудным разделом арифметики. Поныне у немцев осталась поговорка «Попал в дроби», т.е. попал в трудное положение [8].

Проблема исследования заключается в обосновании педагогических условий формирования познавательной активности обучающихся на уроках математики (на примере изучения темы «Обыкновенные дроби»).

Цель исследования: изучить методику формирования понятия обыкновенной дроби в средней школе.

Объект исследования: учебный процесс в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: формирование познавательной активности у школьников на уроках математики в процессе изучения темы «Обыкновенная дробь».

Задачи исследования:

1. Рассмотреть историю развития понятия обыкновенной дроби, обобщить исторический материал по данной теме.

2. Изучить арифметические действия над обыкновенными дробями и их свойства.

3. Изучить структуру процесса формирования понятия обыкновенной дроби.

4. Разработать методические рекомендации по развитию познавательной активности у школьников при изучении темы «Обыкновенные дроби».

Методы исследования: для решения поставленных задач использована совокупность следующих методов: теоретический анализ педагогической, математической, психологической, дидактической, методической литературы; экспериментальная работа; анализ результатов проведенного мероприятия.

Структура работы: дипломная работа состоит из введения, двух глав, заключения, литературы и приложения.

Во введении обосновывается актуальность темы исследования. Сформулированы цель, объект, предмет и задачи исследования.

В первой главе представлена история развития понятия обыкновенные дроби и описаны арифметические действия над обыкновенными дробями.

Вторая глава содержит анализ школьных программ и учебников по математике по изучению темы «Обыкновенные дроби». Также в данной главе представлена организация работы по формированию познавательной активности у школьников на уроках математики в процессе изучения темы «Обыкновенные дроби».

В заключении изложены основные выводы исследования.

В приложении приведены различные упражнения и задачи из ОГЭ по теме «Обыкновенные дроби».

Глава I. Обыкновенные дроби: история возникновения понятия, основные определения и свойства

1.1. История возникновения и развития понятия обыкновенные дроби

Необходимость в дробных числах возникла у человека с древних времен. Они возникли из-за потребности измерять длину, площадь, объём, время и другие величины. Результат измерения не всегда получался натуральным числом. Также при делении целых чисел друг на друга результат не всегда выражался целым числом. Настоящая необходимость в дробных числах возникла при изменении непрерывной величины при помощи выбранной единицы этой величины. Вначале это были конкретные дроби, части известных единиц. Медленным и длительным был переход от конкретных к отвлеченным дробям, не связанным с определенными мерами [8,12].

Первая дробь, с которой познакомились люди на самой ранней ступени развития, наверное, была половина $\frac{1}{2}$. За ней последовали и другие дроби, например, $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ [10]. Они являются самыми древними двоичными дробями. Эти дроби представлялись как часть единицы, причем первоначально как часть конкретной единицы площади – «сетата». Позднее к ним присоединились дроби $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{6}$ и т.д. [16]. Таким образом, это были самые простые дроби, доли целого, называемые единичными или основными дробями. У них числитель всегда единица [10]. Доли (половину, четверть, «осьмушку») $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ употребляет и такой человек, который никогда не слышал слова дробь, применяемого в смысле обозначения части, доли [12].

Способ понимания и выражения дробей в египетской математике своеобразен. Египет одна из первых стран на земном шаре, где цивилизация достигла высокого уровня. Египтяне, достигшие в технике и искусстве высокого уровня развития, в арифметике дробных чисел не пошли далее единичных дробей. Об этом свидетельствуют все дошедшие до нас египетские документы математического содержания периода 2000 г. до н.э. и 8 в. н.э., такие как папирус Райнда, Московский папирус, папирус Ахмеса, которые содержат только единичные дроби [4,12].

Так, например, одним из заданий для учеников, приведенным в папирусе Ахмеса было проверить следующие представления дробей:

1. $\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$.   3. $\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$.

2. $\frac{2}{7} = \frac{1}{6} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}$.   4. $\frac{2}{99} = \frac{1}{66} + \frac{1}{198}$ [10].

Применением способа представления неединичных дробей единичными египетские авторы решают без особого труда отдельные задачи. Нужно разделить 7 хлебов между 8 человеками поровну. На долю каждого приходится $\frac{7}{8}$, но такого числа для египтянина не существовало, зато он знал, что: $\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Ему и надо каждому участнику выделить эти доли. Если все 7 хлебов разрезать на восьмые доли и отсчитать каждому по 7, то потребуется для этого сделать (7×7) 49 разрезов. Египтянин знал, что ему надо иметь 8 половинок, 8 четвертушек и 8 осьмушек, поэтому он режет 4 хлеба пополам, 2 хлеба на четыре части каждый и 1 хлеб на восемь частей. Ему нужно было сделать только (4+6+7) 17 разрезов [12].

В качестве основной дроби у египтян фигурировала лишь дробь $\frac{2}{3}$, которая применялась ими постоянно и имела особое значение. Объясняется это тем, что в сознании Египтян существовало лишь небольшое число индивидуальных дробей и отсутствовало ещё общее понятие дроби, и представлением дроби в виде суммы одинаковых основных дробей они, как правило, не пользовались. Также были попытки ввести в счетный обиход дробь $\frac{3}{4}$. Данная величина должна была играть такую же роль. Но эту дробь в позднейшее время стали составлять из единичных дробей, следуя общему принципу. Её представили в виде суммы половины и четверти [7,12,4].

Ещё позднее стали рассматриваться дроби вида $\frac{1}{\mathrm{n}}$, которые назывались аликвотными дробями или основными дробями, где n – целое число, т.е. n-е доли единицы. Обозначались они иероглифом «ра», первоначально имевшим значение $\frac{1}{32}$ – «геката», основной меры емкости (около 4,5л) [16,7]. Для обозначения этих аликвотных дробей египтяне писали число, которое мы ставим в знаменателе, а над ним (или перед ним) помещали знак ○, который означал также и определенную меру емкости. По-видимому, это обозначение сначала было знаком этой именованной величины, а лишь впоследствии получило отвлеченный смысл (рис.1).

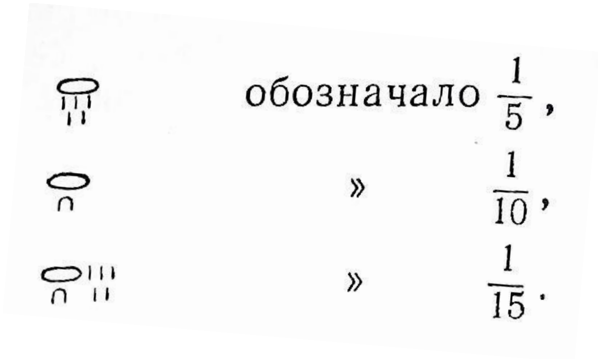


Рис.1 Обозначение аликвотных дробей в Древнем Египте

С переходом к иератическому письму эти иероглифические обозначения подверглись, разумеется, изменениям, вместо иероглифа «ра» стали писать просто точку. Образец написания дробей представлены в папирусе Райнда (рис. 2)[7].

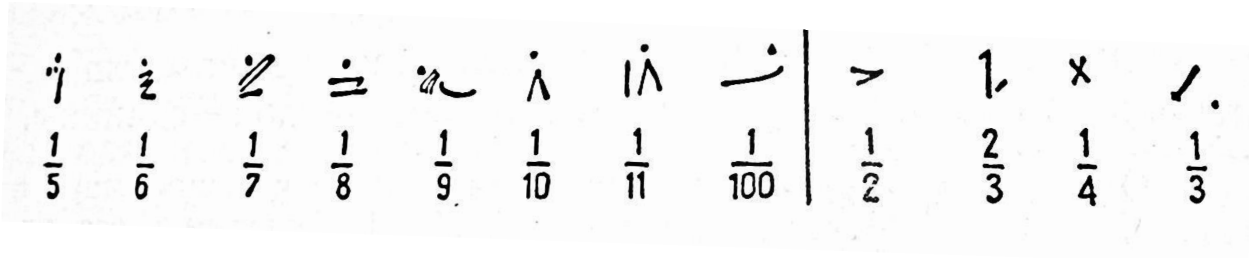


Рис.2 Обозначение дробей из папируса Райнда

В итоге вот как записывались дроби в египетских письмах (рис. 3) [10].

Для наиболее простых дробей существовали особые «индивидуальные» обозначения. Именно, дробь $\frac{1}{2}$ обозначалась иероглифом, по смыслу означавшим понятие «половина» или «сторона» [7].

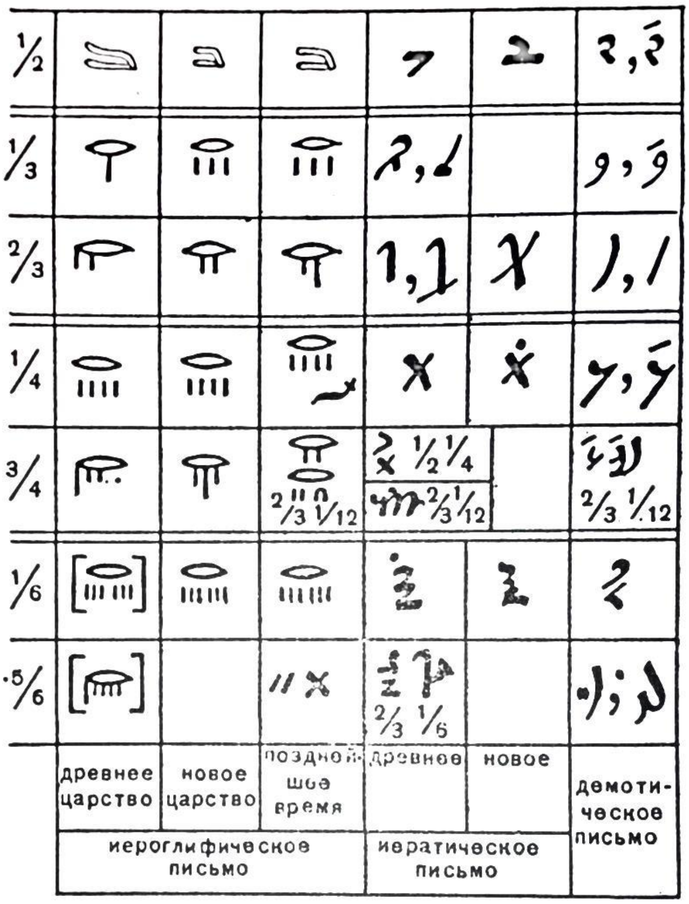


Рис.3 Обозначение дробей в египетских письмах

Египтяне записывали числа в десятичной непозиционной системе счисления. Об этом свидетельствуют расшифровки папирусов учеными. Отдельными значками, иероглифами, обозначались разрядные единицы – 1, 10, 100, 1000, 10 000, 100 000, 1 000000 и 1 000000000, а промежуточные - повторением необходимого количества соответствующих разрядных единиц. Нуль при такой системе не нужен [4,8]. Когда результаты какого-либо расчета или измерения приводили к дроби неединичной, ее представляли в виде суммы дробей с числителями, равными единице (так называемые аликвотные дроби). Например, $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$; $\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$ и т.д. В папирусе Ахмеса имеются специальные таблицы для представления всех дробей вида $\frac{2}{n}$ с числителем 2 и нечетными знаменателями от 5 до 99, представленных в виде суммы единичных дробей. Например, $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$. Очевидно, такие таблицы были раз и навсегда изготовлены, и ими пользовался каждый обучающийся математике. Кожаный свиток британского музея, который относят к несколько более ранней эпохе, чем Папирус Райнда, содержит, кроме названных ещё 26 случаев, представления неединичных дробей в виде суммы единичных. Некоторые дополнительные представления дают другие папирусы [12].

На дальнейшее развитие счёта с дробями оказали влияние потребности календаря. Египтяне делили год на 12 месяцев по 30 дней и прибавляли по их истечении 5 добавочных дней. Если бы раз в четыре года добавляли еще один день, было бы очень удобно, лучше, чем у нас сейчас. Но високосных годов у египтян не было. За 4 года начало года сдвигалось на сутки, и в результате примерно за полторы тысячи лет начало нового года проходило через все дни календаря, что египтяне считали его большим достоинством. Числа месяца отчитывались как его доли, а этот счет переносился а затем и на другие случаи. Так, 1-е число считалось $\frac{1}{30}$ месяца, 3-е - $\frac{1}{10}$, 20-е - $\frac{2}{3}$; следовательно, 24-е, т.е. $\frac{4}{5}$ месяца, представлялось как сумма $\frac{1}{30}+\frac{1}{10}+\frac{2}{3}$ месяца [16,4].

Также египтяне использовали дроби для вычисления площадей и объемов различных фигур. У египтян представление неединичных дробей в виде совокупности (различных между собой) основных дробей, каковыми являлись (в окончательной стадии развития) аликвотные дроби вида $\frac{1}{k}$ и дробь $\frac{2}{3}$, служило каноническое выражение дроби. Понятие «отвлеченной» дроби возникло, без всякого сомнения, из образования простейших долей общеупотребительных мер длины, веса и т.д. [7].

С названной эпохи рядом с единичными дробями появляются другие виды дробей [12].

В древнем Вавилоне высокий уровень культуры был достигнут еще в третьем тысячелетии до нашей эры. Об этом свидетельствует большое количество клинописных математических табличек, найденных после проведённых в XX веке раскопок [10].

Шумеры в древнейшую эпоху пользовались также единичными дробями, но уже в третьем тысячелетие до нашей эры эти дроби стали вытесняться шестидесятеричными. Вавилоняне имели шестидесятеричную систему счисления, т.е. систему счисления с основанием 60, в которой меньшая единица измерения составляла $\frac{1}{60}$ часть высшей единицы [12].

Также в вавилонских клинописных текстах впервые встречается позиционная система счисления. Происхождение шестидесятеричной системы счисления у вавилонян связанно, как полагают некоторые учёные, с тем, что вавилонская денежная и весовая единица измерения подразделялась в силу исторических условий на 60 равных частей: 1 талант = 60 мин. 1 мина = 60 шекель. Шестидесятые доли были привычны в жизни вавилонян. Вот почему они пользовались шестидесятеричными дробями, имеющими знаменателем всегда число 60, или его степени: $60^2 = 3600$; $60^3 = 216\,000$ и т.д., которые назывались систематическими дробями [10].

Это число было выбрано очень удачно: результаты деления на числа, не содержащие других простых множителей, кроме 2, 3 и 5 выражались конечными шестидесятеричными дробями, что было крайне важно для практических вычислений. Созданная ими система шестидесятеричных дробей была настолько удобна, что уже 200 лет до н. э. была принята греческими астрономами, от последних перешла в европейскую науку и удовлетворяла ее до конца 16 в. Обыкновенные дроби к тому времени получили уже широкое распространение в практической жизни, называясь народными, в то время как шестидесятеричные носили название физических или астрономических [12].

Следы вавилонской шестидесятеричной системы счисления удержались и в современной науке при измерении времени и углов. До наших дней сохранилось деление часа на 60 минут, минуты на 60 секунд; окружности на 360 градусов, градуса на 60 минут, минуты на 60 с. Вавилоняне внесли ценный вклад в развитие астрономии [8]. Они были хорошими астрономами. Именно от вавилонян сохранилось деление суток на

24 часа и шестидесятеричная система счёта углов и времени: 1 час = 60 мин., 1 мин. = 60с., окружность принимается за 360^0. Вот такой была математика в Вавилоне, оказавшая, несмотря на всё свое своеобразие существенное влияние на развитие нашей науки [4]. Шестидесятеричными дробями пользовались в астрономии ученые всех народов до 17 века, называя их астрономическими дробями. В отличие от них, дроби общего вида, которыми пользуемся мы, были названы обыкновенными. Вот некоторые примеры заданий:

1. Выразить в шестидесятеричных дробях следующие обыкновенные дроби: $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{7}{8}$.

2. Выразить в обыкновенных дробях следующие шестидесятеричные дроби: $\frac{18}{60}$; $\frac{3250}{3600}$; $\frac{148000}{60^3}$.

3. Выразить в минутах $\frac{2}{5}$ часа.

4. Выразить в дробях (превратить в часы) 15 мин. и 12 с. [10].

Возможны разные другие виды дробей, записанные в определенной позиционной системе счисления (систематические). Так, например, за основание системы таких дробей, как за основание системы счисления, можно взять любое натуральное число и представить всякую правильную дробь в виде $0 + \frac{b_1}{a} + \frac{b_2}{a^2} + \cdots$ Изучением таких дробей занимались многие математики, в том числе Лагранж, а в особенности слепой французский математик Панжон. В Новое время изучались другие различного вида систематические дроби. Так, математик конца XIX века Стефанос рассматривал дроби вида $0 + \frac{a_1}{1 \cdot 2} + \frac{a_2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$ Эти дроби тоже нашли важное применение в математике; вводились также дроби, знаменателями которых являются только произведения простых чисел $p_1, p_1 p_2, \ldots$ [12].

Система шестидесятеричных дробей представляет собой, несомненно, наиболее совершенную часть древнегреческой вычислительной техники; однако в теоретическом отношении она страдает известной непоследовательностью. Непосредственной целью и единственным полем применения новой системы служили тригонометрические расчеты. Шестидесятеричная система применялась у вавилонян в астрономических расчетах, ради которых ввели ее греческие вычислители [7].

Однако нужно подчеркнуть, что достижения вавилонских математиков становились известными в Древней Греции и в Индии и не исключено также, что в Китае [4].

Вавилонская математика оказало влияние на греческую математику. В Древней Греции, высокая культура которой приобрела мировое значение, существовали две системы письменной нумерации: аттическая и ионийская, или алфавитная [10].

Хотя единичные дроби остались до конца греческой истории в практической жизни, Греческие математики пользовались для вычисления также шестидесятеричными и общими, обыкновенными дробями. История наших обыкновенных дробей получает свое начало в Греции. Рациональную дробь вида $\frac{p}{q}$ греки, правда, не называют числом, а отношением, однако греческие математики рассмотрением таких отношений положили начало теории наших обыкновенных дробей [12]. Письменное выражение обыкновенных дробей совершалось у древних греков различными способами. Наиболее совершенный из них по существу не отличается от нашего представления обыкновенных дробей. Его мы находим у Герона и еще чаще у знаменитого Диофанта, который жил позднее Герона. По этому способу числитель и знаменатель дроби обозначаются двумя числами, записанными, конечно в ионийской системе нумерации и расположенными одно под другим; только порядок расположения прямо противоположен нашему: числитель пишется снизу, а знаменатель сверху; Например, $\frac{5}{3}$ означало три пятых. Дробной черты между числителем и знаменателем у греков не существовало. По-видимому, в более раннее время обыкновенные дроби записывались менее совершенными способами. Эти способы разнообразны; наиболее простой и наименее удобный состоит в выписывании дроби с помощью ее словесного выражения [7,10].

Например, Архимед формулируют определение длины окружности словами так: она равна 3-м целым диаметрам и кусочку, который находится (по величине) между одной седьмой и десятью семьдесят первыми $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Эратосфен пишет: часть меридиана между тропиками содержит 11 таких частей, каких весь меридиан содержит 83 (вместо того чтобы сказать, что этот отрезок меридиана составляет $\frac{11}{83}$ всего меридиана) [10].

Римляне не развили дальше понятия обыкновенных дробей. Они пользовались в основном только конкретными дробями. АСС (фунт), который у древних римлян служил основной единицы измерения массы, а также денежной единицей, делился на 12 равных частей, унций. Со временем унции стали применяться для измерения любых величин. Так возникли римские двенадцатеричные дроби, то есть дроби, у которых знаменателем всегда было число 12. Вместо $\frac{1}{12}$ римляне говорили «одна унция», которая являлась основной дробью, $\frac{5}{12}$ – «пять унций» и так далее. Три унции назывались четвертью, четыре унции – третью, шесть унций – половиной [10,12].

Дроби в Древней Руси называли долями, позднее «ломаными числами». Как свидетельствует старинные памятники русской истории, наши предки-славяне пользовались десятичной алфавитной славянской нумерацией, сходной с ионийской. В сочинении о календаре, которое является старейшим арифметическим памятником Киевской Руси, написанном на славянском языке в 1136 году, Кирик Новгородец – ученый монах, автор сочинения, в календарном счете пользуется конкретными дробями, «дробными числами»: $\frac{1}{5}, \frac{1}{25}$ и т.д. Например, «четверть», «осьмина» долгое время означали конкретные дроби, части более крупной меры. В старых руководствах находим следующие другие названия дробей на Руси:

$\frac{1}{2}$ – половина, полтина

$\frac{1}{4}$ – четь

$\frac{1}{8}$ – полчеть

$\frac{1}{7}$ – седьмина

$\frac{1}{3}$ – треть

$\frac{1}{5}$ – пятина

$\frac{1}{10}$ – десятина и т.д.

Славянская нумерация употреблялась в России до 16 века, лишь в этом веке в нашу страну постепенно стала проникать десятичная позиционной система счисления [8].

В древнем Китае пользовались десятичной системой счисления. Обыкновенные дроби вида $\frac{m}{n}$ были известны в Китае издавна. Специального знака для дроби у китайцев не имелось, и, вообще говоря, дробь вида $\frac{m}{n}$ записывали в виде «n-х долей m». Для наиболее употребительных дробей сохранялись также особые древние наименования и иероглифы. Так, в книгах 2-8 «Математики в девяти книгах», в которой изложены правила действий над дробными числами, вычисление площадей и т.д., половина (бань) изображается иероглифом 半, одна треть – «малая половина» (шао – бань) 少半, а две трети – «большая половина» (тай-бань) 太半 [10, 26].

Развитием идеи обыкновенной дроби мы обязаны Индии. Учение о дробях было развито у них весьма подробно. Индия является родиной позиционной десятичной нумерации. Индийцы также употребляли вначале единичные дроби, но очень рано они начинают пользоваться обыкновенными дробями общего вида. Наше обозначение обыкновенных дробей при помощи числителя и знаменателя было принято в Индии еще в 8 в. н.э., однако без дробной черты. Вместо $\frac{1}{3}$, например индийцы писали $\begin{matrix}1\\3\end{matrix}$. Дробная черта стала применяться лишь в 13 веке. Уже в древнейших их памятниках, создание которых относится к 4 в. до н.э., встречаются дроби $\frac{3}{8}, \frac{2}{7}$ и тому подобные. Дроби писались в форме, сходной с современной: числитель ставили над знаменателем, только без разделительной черты [10,12,26].

Бхаскара, рассматривая дробь вида $\frac{a}{0}$, пояснял, что это тоже число, но не претерпевающее изменений, такую дробь он считал представлением бесконечно больших чисел [21].

У индийцев имеются также многочисленные примеры специальной терминологии для обозначения дробей. Так в наиболее ранней книге «Ригведе» приводятся названия простейших дробей – ардха $\frac{1}{2}$, трипада $\frac{3}{4}$, позднее упоминаются дроби пада $\frac{1}{4}$, шапха $\frac{1}{8}$, куштха $\frac{1}{12}$, кала $\frac{1}{16}$ [26].

Для обозначения дробей в «Шульбах» - сочинении (книга), в котором содержатся сведения о знаниях индийцев по арифметике, применяли специальные термины «амша» и «бхага», что в переводе означает «часть», в сочетании с количественными и порядковыми числительными, например: триамша - $\frac{1}{3}$, панчамабхага - $\frac{1}{5}$. Порой эти термины могли опускаться; так, дробь $\frac{1}{12}$ обозначалась или «двадашабхага», или просто «двадаша». Имелись и другие термины, обозначающие дробь, например «гуна»: двигуна $\frac{1}{2}$, тригуна $\frac{1}{3}$, чатургуна $\frac{1}{4}$. Другие дроби обозначались сходным образом: дви-саптана $\frac{2}{7}$, три-аштама $\frac{3}{8}$ [27].

Обыкновенные дроби индийцев наряду с египетскими единичными и вавилонскими шестидесятиричными перешли к арабам. Труды ал-Хорезми оказали огромное влияние на последующее развитие математики. Часть трактата ал-Хорезми по арифметике имеет предметом дроби, в котором особые названия имелись для долей единицы только до $\frac{1}{10}$ включительно. Прочие доли единицы назывались по-арабски не отдельными словами, как у нас, вроде тринадцатая, а «одна часть из тринадцати частей» или «одна часть из тринадцати». Соответственно отличалось наименование дробей вида $\frac{m}{n}$; арабская речь знала «три пятых», но не «три семнадцатых», вместо чего говорили «три части из семнадцати» или «три части из семнадцати частей». Вследствие этого, доли единицы до $\frac{1}{10}$ включительно назывались «выговариваемыми», а прочие – «невыговариваемыми».

В «Книге о том, что нужно знать писцам, дельцам и другим в науке арифметике» Абу-л-Вафы, в которой был обобщен и развит далее опыт арабских счетных работников и вычислителей весьма детально изложено учение о дробях (определения, правила и примеры). Прежде всего, Абу-л-Вафа указывает, что отношение есть мера одного из двух чисел по сравнению с другим, причем имеются три вида отношений: меньшего к большему, большего к меньшему и отношению равных. Дроби возникают из отношений меньших чисел к большим. Абу-л-Вафа выделяет три группы дробей, которые все вместе назовем основными, а именно:

1) главные дроби – доли единицы $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{10}$ включительно;

2) составные дроби вида $\frac{m}{n}$, $m < n \leq 10$, среди которых особое место занимает $\frac{2}{3}$;

3) соединенные дроби – произведения главных дробей, вида $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} \cdots \frac{1}{p}$ (не включая главные).

Основные дроби, а также все дроби, представимые в виде сумм и произведений основных дробей, Абу-л-Вафа именует «выразимыми», или «выговариваемыми», остальные же – «невыразимыми», или «невыговариваемыми», глухими. Выразимые дроби – те, знаменатели которых имеют множителями числа 2, 3, 5, 7; невыразимые имеют в знаменателе простые множители, большие 7. Абу-л-Вафа строил учение о дробях и действиях над ними с помощью отношений.

Рациональное отношение какой-либо пары чисел может быть выражено разными способами. Ал-Каши, который определял дробь как «количество, отнесенное к целому, принятому за единицу» писал: «Каждое отношение числителя дроби и ее знаменателя в числах выражается бесконечно, но наилучшее из них для применения – это наименьшее из двух целых чисел и с тем же отношением, все остальные выражения хуже» [26].

У ал-Хассара – западноарабского ученого впервые появляется разделительная черта между числителем и знаменателем. Примерно в это же время она появляется и в европейском руководстве Леонардо Пизанского, который считается первым европейским ученым средневековья, ставшим регулярно применять дробную черту и современную запись обыкновенной дроби. В его книге «Книга абака» впервые встречается слово «дробь» вместо «ломаное число». С 16в. письмо дробей полностью принимает современный вид [10,12,26].

Явно новое определение числа была дано впервые в 17в. гениальным английским ученым Исааком Ньютоном. Во «Всеобщей арифметике» Ньютона понятие дроби вводится следующим образом: «Запись одной из двух величин под другой, ниже которой между ними проведена черта, обозначает частное или же величину, возникающую при делении верхней величины на нижнюю. Так, $\frac{6}{2}$ означает величину, возникающую при делении 6 на 2, т.е. 3, а $\frac{5}{8}$ – величину, возникающую при делении 5 на 8, т.е. восьмую долю числа 5. Далее, $\frac{a}{b}$ есть величина, возникающая при делении a на b. Точно так же $\frac{ab-bb}{a+x}$ означает величину, получающуюся при делении ab – bb на a + x и т.д. Величины такого рода называются дробями» [9]. Также он писал: «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу». Это определение включает дробные числа [8].

Как мы видим, происходит расширение понятия числа. Важнейший этап в развитии понятия о числе. Первоначально под «числами» понимались только натуральные, целые числа, а с появлением дробей понятие числа развилось, стало более широким. Всякое натуральное является частным видом дробного числа. Например, число 5 можно представить как $\frac{5}{1}$; $\frac{10}{2}$ и т.д. Нуль также можно рассматривать как дробное число $\frac{0}{1}$; $\frac{0}{2}$ и т.д. Это значит, что множество дробных чисел включает в себя и все целые числа. Все дробные числа стали называться рациональными числами [8,10,28].

Таким образом, столь многообразные способы обозначения дробей позволяют проследить путь, каким шел процесс от более ранних обозначений, когда каждая из простейших дробей, чаще всего аликвотных, имела специальный термин, до позднейших обозначений, когда выработались общие принципы наименования любых дробей.

Практика привела человека к необходимости использования разных единиц, а из отношений единиц этих конкретных мер возникло абстрактное понятие дроби. Различают три типа дробей:

1) дроби единичные (аликвоты) или доли: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$;

2) дроби систематические, знаменателями которых являются не всякие числа, а только числа из некоторого определенного множества, например степени 60;

3) дроби общего вида, у которых и числители и знаменатели могут быть любыми целыми числами.

Считается, что первые дроби появились в Древнем Египте. Развитием идеи обыкновенной дроби мы обязаны Индии.

1.2. Арифметические действия над обыкновенными дробями и их свойства

Самой замечательной чертой египетской арифметики являются действия с дробями. Все дроби сводится к суммам так называемых основных дробей, то есть дробей, имеющих числителем единицу. Единственное исключение составляла дробь $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$, для которой существовал специальный символ. Сведение к суммам основных дробей производилось с помощью таблиц, которые давали разложение дробей вида $\frac{2}{n}$ - единственное необходимое разложение, так как умножение было двоичным. В папирусе Райнда представлена таблица разложения на степенные дроби для всех нечетных n от 5 до 331. Например, $\frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$. Остается загадкой, почему именно такая сумма дробей использовалась для представления. Такие действия с дробями придавали египетской математике тяжеловесность и растянутость, однако разложение на сумму основных дробей применялось в течение тысячелетий, не только в эпоху эллинизма, но и в средние века. В то же время указанное разложение предполагает определенное математическое искусство [22]. Существует предположение, что при сложении и вычитании дробей египтяне применяли процесс, «отвлеченный» от операций раздробления и превращения мер, т.е. процесс пропорционального увеличения и уменьшения слагаемых и вычитаемых. Элемент отвлечения проявляется в том, что «коэффициент пропорциональности» не связывается теперь непременно с общеупотребительным соотношением единиц, а выбирается произвольно, применительно к данным в задаче долям с тем, чтобы преобразовать их либо в целые числа, либо в такие доли, операции с которыми не вызывают затруднений [7].

У египтян сложились определенные приемы производства математических операций с дробями. Общей для всей вычислительной техники египтян является ее аддитивный характер, при котором все процедуры по возможности сводится к сложению. Совместно с примитивным пониманием дроби только как части единицы эта особенность обусловила своеобразный характер вычислений. При умножении, например, преимущественно используется способ постепенного удвоения одного из сомножителей и складывания подходящих частных произведений (отмечены звездочкой).

Например, $\frac{2}{3}\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{30} \cdot 10$ 1 $\frac{2}{3}\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{30}$

$$*2 \quad 1\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{10}\ \ \frac{1}{30}$$

$$4 \quad 3\,\frac{1}{2}\ \frac{1}{10}$$

$$*8 \quad 7\,\frac{1}{5}$$

Вместе $8\,\frac{2}{3}\ \frac{1}{5}\ \ \frac{1}{10}\ \frac{1}{30}$ или 9.

При делении также используется процедура удвоения и последовательного деления пополам. Деление, по-видимому, было самой трудной математической операцией для египтян. Здесь наблюдается самое большое разнообразие приемов. Так, иногда в качестве промежуточного действия применялось нахождение двух третей или одной десятой доли числа и тому подобное. При сложении дробей, имеющих разные знаменатели, египтяне использовали умножение их на вспомогательные числа. Способы подбора этих вспомогательных чисел не дают, однако, права судить об этом приеме как о единообразном процессе, адекватном способу приведения дробей к общему знаменателю. Исторические реконструкции во многом еще спорны и не подтверждены достаточным количеством фактов [21].

Считается, что египетская система представления дробей и египетские способы вычисления при помощи единичных дробей перешли в вычислительную практику древних греков уже в 6 в. до н.э. До 3в. до н.э. ими исключительно пользовались и греческие математики [12]. Папирус Райнда представляет собой собрание 84 задач прикладного характера. При решении этих задач производятся действия с дробями. В Московском папирусе собраны решения 25 задач [21]. Однако еще за 2-3 столетия до Евклида и Архимеда греки свободно владели арифметическими действиями с дробями. Вот как на вопрос, сколько учеников посещают школу. Ответ: «Половина изучает математику, четверть – музыку, седьмая часть пребывает в молчании, кроме этого, есть три женщины». Сколько учеников посещают школу? [8].

Египетские дроби получили повсеместное распространение в широких кругах греческих купцов, ремесленников и художников, несмотря на позднее появившуюся систему обыкновенных дробей. Из того обстоятельства, что в древнегреческой математике «основные» и «обыкновенные» дроби применялись совместно, вытекала необходимость перевода дробей из одной системы в другую. Перевод египетской дроби в обыкновенную не представлял никаких затруднений. Для этой цели уже древнеегипетские вычислители имели, по существу, общий прием: процесс «дополнения». Папирус Райнда содержит несколько задач, специально посвященных вопросу о «дополнении» некоторой «правильной» дроби до 1. Этот процесс длительный и трудоемкий, с которым мы познакомились выше. Этот процесс нуждался лишь в небольших модификациях, обусловленных наличием понятия «обыкновенные дроби», которого, как мы видели, в древнейшей египетской вычислительной технике не существовало по древнеегипетским математическим сочинениям. Обратный перевод «обыкновенной» дроби в «египетскую» был, конечно, труднее. Естественно, что греческие вычислители, для которых соответствующий процесс был гораздо важнее, чем для египетских, должны были детально разработать соответствующие приемы вычислений. Источником, в котором изложены некоторые приемы, является греческий папирус египетского происхождения, относящийся к 6-7 векам н.э. 9 по месту находки называемой Ахмимским. Он излагает правила счета и решения простейших арифметических задач. Мы находим в этом папирусе такие «формулы»:

1. $\frac{a}{bc} = \frac{1}{c\frac{b+c}{a}} - \frac{1}{b\frac{b+c}{a}}$.

Например, $\frac{2}{11} = \frac{1}{1\cdot\frac{11+1}{6}} - \frac{1}{11\cdot\frac{11+1}{2}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$.

2. $\frac{a}{bc} = \frac{1}{c\frac{b+mc}{a}} + \frac{1}{b\frac{b+mc}{a}\cdot\frac{1}{m}}$.

Например, $\frac{7}{176} = \frac{1}{11\cdot\frac{16+3\cdot 11}{7}} + \frac{1}{16\cdot\frac{16+3\cdot 11}{7}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{77} + \frac{3}{112} = \frac{1}{77} + \frac{1}{56} + \frac{1}{112}$.

3. $\frac{a}{cdf} = \frac{1}{c\frac{cd+df}{a}} + \frac{1}{f\frac{cd+df}{a}}$.

Например, $\frac{28}{1320} = \frac{28}{10\cdot12\cdot11} = \frac{1}{10\frac{120+132}{28}} + \frac{1}{11\frac{120+132}{28}} = \frac{1}{90} + \frac{1}{99}$.

Все эти примеры, как мы видим, требуют от вычислителя большой сноровки и вычислительной интуиции, ибо нужно подобрать соответствующее преобразование так, чтобы в знаменателях обоих слагаемых оказались целые числа. В Ахмимском папирусе даны также правила для представления обыкновенной дроби в виде египетской с тремя и большим числом членов.

Хотя обыкновенные дроби и обладали преимуществами в сравнении с «египетскими», однако и они представляли трудности во всех тех случаях, когда знаменатели их сколько-нибудь значительны. Между тем происходит дальнейшее развитие. Греки не только сами сохранили систему действий с дробями, но и способствовали ее распространению. Уже в 5 веке до н.э. греки умели производить все действия с обыкновенными дробями [7,8].

Математическое наследие древнего Вавилона как мы помним основано на шестидесятеричной системе счисления. В отличие от египтян, сводивших умножение к удвоению, вавилоняне производили его прямо, действуя, так же как и мы, поразрядно [16]. Содержание табличек из этой эпохи показывает, что благодаря этой системе были созданы многие единообразные правила арифметических действий с дробями. Для облегчения действий существовали таблицы умножения. При перемножении больших чисел с помощью таблицы умножения находились частичные произведения, которые затем складывались. Деление производилось с помощью таблиц обратных значений [21]. В таблице отыскивалось значение, обратное делителю, а затем на него множили делимое. Позднее вавилоняне стали применять и способ поразрядного деления, подобный нашему способу деления. При вычислениях с дробями греки пользовались их превращением в одноименные, сокращением и «расширением», т.е. умножением числителя и знаменателя на дополнительные множители. Для облегчения сложения и вычитания единичных дробей имелись особые вспомогательные таблицы, в которых видны следы египетской математики [16]. Геометрические знания вавилонян, по-видимому, превышали египетские, так как в текстах помимо общих типов задач встречаются зачатки измерения углов и тригонометрических соотношений. В основном, впрочем, они тоже состояли из вычислений площадей и объемов прямолинейных фигур, обычных для элементарной геометрии [21].

Схема умножения шестидесятеричных дробей объясняет Теон, совершается в порядке нисхождения разрядов; при этом превращение низших разрядов в высшие совершается одновременно с суммированием частных произведений. Излагая правила деления шестидесятеричных дробей, Теон предполагает известные правила действий с целыми числами. Вообще при делении шестидесятеричных дробей умножение отдельного разряда частного на разряды делителя перемножается с вычитанием получаемых произведений из делителя и раздроблением остатков в единицы низших разрядов. Мы видим, что схема античного умножения и деления шестидесятеричных дробей отличается от нашей схемы умножения и деления дробей.

Шестидесятеричные дроби вавилонян имели следующие преимущества:

1) действия над дробями производились по тем же правилам, как и над целыми числами;

2) основание мер и нумерации было одно и то же – 60. Поэтому употребление шестидесятеричных дробей значительно упрощало вычисления при решении практических задач.

Как производили действия над дробями римляне, мы можем наблюдать в задачах. Например, задача Горация: «Скажи мне, Альбина сын, что останется, когда ты от 5 унций отнимешь одну унцию? Недоумение возникает, почему ученик не ответил сразу «четыре унции» разъясняется ответом ученика. Ответ ученика, однако, был не четыре унции, а одна треть. Ученик выполнял такие вычисления: $\frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. А если прибавить одну унцию, что получится тогда?» ответ был «Половина» $\frac{5}{12}+\frac{1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$. Мы видим, что римляне называли дроби их прежними конкретными названиями [12].

Китайская математика также развивалась. Действия над дробями, производившиеся на счётной доске, были разработаны в китайской арифметике весьма детально; при этом широко применялась сокращение дробей. Об этом свидетельствуют первые задачи из «Математики в девяти книгах», посвященные сокращению дробей и предшествующие их сложению и вычитанию. Правило сокращения гласит: «То, что можешь разделить пополам, раздели пополам; если нельзя разделить пополам, то установи количества числителя и знаменателя, из большего вычти меньшее; продолжай взаимно уменьшать до тех пор, пока не получатся равные; на это равное число и сократи» [2]. Действия над дробями описаны в древнегреческих и древнекитайских книгах очень сжато и не всегда ясно. Объясняется это тем, что они подробнее объяснялись устно. В книге 1 из «Математика в девяти книгах», которая является самым значительным и, пожалуй, единственным крупным памятником древней китайской математики, введены простые дроби и арифметические действия над ними. Правила действий – обычные: особенностью является только то, что при делении дробей требуется предварительное приведение их к общему знаменателю [12]. Прием составления общего знаменателя нескольких дробей явно не сформулирован. Были предприняты попытки приема составления общего наименьшего знаменателя нескольких дробей. Согласно правилу книги 1 «Математики в девяти книгах» знаменатель суммы дробей получали перемножением знаменателей слагаемых; о составлении наименьшего общего кратного не говорится. После сложения дробей полученную сумму сокращали. Для деления числа на дробь делимое прямо умножали на знаменатель делителя, и результат делили на числитель. Это столь привычное для нас правило встречается в китайской математике впервые [26].

В древней и средневековой математике народов Индии много общего с китайской математикой. В книге Бхаскара «Лилавати» излагаются действия над дробями [21]. Вот такую задачу предлагает решить Бхаскара: «Если некоторое число умножить на 5, от произведения отнять его треть, остаток разделить на 10 и прибавить к этому последовательно $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ первоначального числа, то получится 68. Как велико это число?» [10].

Бхаскара рассматривает в качестве общего знаменателя произведение знаменателей данных дробей, не обращая внимания на общие делители их. Этот термин в учебниках появляется только в 18в., до этого говорится только о соответственном расширении дробей [12].

О сложении, вычитании, умножении, делении и возведении дробей в квадрат можно судить по следующему отрывку из «Шульба-сутры» Баудхайаны: «Затем он измерил площадь этой квадратной фигуры, сторона которой равна трем без одной трети пуруша. С западной стороны этого квадрата имеется прямоугольная рукоятка, длина которой равна половине пуруша, увеличенной на десять ангула (т.е. на $\frac{1}{12}$ пуруша), а ширина – одной пуруше, уменьшенной на одну треть. Это дает площадь жертвенника, равного семи, к которой добавляются два аратни и один прадеша». Поскольку два аратни и один прадеша равны 60 ангула и $\frac{1}{2}$ пуруша, то площадь жертвенника составит $\left(3-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=7\frac{1}{2}$ [27].

Индийские математики умножают дроби по нашему правилу. Широко известен математик древней Индии Брахмагупта, изложивший правила действий с дробями, мало отличавшиеся от наших правил [10]. Так Брамагупта учит правилам действий над дробями почти в наших терминах: «произведение дробей есть произведение числителей, разделенное на произведение знаменателей». Правило деления дробей, состоящее в том, что для деления дроби на дробь нужно делимое умножить на дробь, обратную делителю. Логическая трудность, возникающая при делении дробей и заключающаяся в том, что при делении на правильную дробь получается число, большее делимого, привлекает к себе менее внимания, чем аналогическая трудность при умножении дробей. Тарталья разъясняет её, указывая, что в делении идет речь о том, сколько раз делитель содержится в делимом. Сложение дробей почти всегда ограничивается только двумя компонентами, что упрощает приведение их к общему знаменателю. Тарталья и Клавий выдвинули требование находить при сложении и вычитании дробей наименьший общий знаменатель. Для этого знаменатель первой дроби умножается на 2,3,5 и т.д., пока не получится кратное второго знаменателя, которое таким же образом комбинируется с третьим знаменателем и т.д. Только в конце 17в. Появляется впервые наше правило нахождения общего знаменателя [12].

Индийские приемы арифметических действий стали затем достоянием арабской и европейской учебной литературы.

Математики арабских стран во времена ал-Хорезми, и, несомненно, ранее, имели дело с представлением обыкновенных дробей как сумм долей единицы, которое было издавна распространено на территориях Египта и Вавилона, попавших под власть арабов. Поясняя действия с обыкновенными дробями, ал-Хорезми подчеркивают аналогию с шестидесятеричными дробями, уподобляя исходные доли единицы минутам, а их произведение – секундам. При умножении дробей рекомендуется перевести каждый множитель в единицы его низшего разряда, после чего дело сводится к умножению целых и переводу произведения в шестидесятеричные дроби. Предварительно сообщаются правила определения разряда произведения при перемножении отдельных шестидесятеричных разрядов. Для деления делимое и делитель выражаются в единицах низшего в них разряда; если при этом в делимом таких единиц меньше, его переводят в следующий низший разряд. Далее также описаны сложение, вычитание, удвоение и раздвоение шестидесятеричных дробей [26].

Разновидностью счета долями единицы явился также весьма распространенным у ал-Каши. Основными дробями у населения Средней Азии и Ирана служили данги, тасуджи, ашаиры, средневековые меры веса и денег, образующие соответственно $\frac{1}{6}, \frac{1}{24}$ и $\frac{1}{96}$. Ал-Каши учит, прежде всего, переводу обыкновенных дробей в данги, тасуджи, ашаиры и обратно. Например, $\frac{5}{7} = \frac{30:7}{6} = \frac{4}{6} + \frac{8 \cdot 7}{24} = \frac{4}{6} + \frac{1}{24} + \frac{4:7}{96} = 4\text{д.}\, 1\text{ т.} \frac{4}{7}$ аш. Для умножения и деления дробей, представленных в этой системе, пользовались таблицами, содержащими произведения кратных отдельных элементарных дробей друг на друга [26].

Абу-л-Вафа учит действиям с обыкновенными дробями и их сокращению. Так как жители стран Ближнего и Среднего Востока широко пользовались долями единицы, а остальные дроби представляли в виде сумм и произведений последних, Абу-л-Вафа подробно формулирует многочисленные правила для такого представления. По существу, все состоит в разложении дробей на шестидесятеричные, которые в свою очередь представлены через основные. Существовали четыре таблицы, содержащие выражения наиболее употребительных дробей в шестидесятеричных. Для приведения дробей к общему знаменателю рекомендуется составлять общее наименьшее кратное всех знаменателей (оставить, если речь о наименьшем кратном была уже). Действия с дробями носили шестидесятеричный характер. Это ясно из следующего примера на сложение и умножение:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ = \frac{\frac{1}{4} \cdot 60 + \frac{1}{5} \cdot 60 \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{60} = \frac{22\frac{1}{2}}{60} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

Процедуры, описанные Абу-л-Вафой, дали толчок для дальнейших усовершенствований. Представление обыкновенных дробей суммами и произведениями долей единицы встречается позднее на Востоке у ал-Хассара [26].

Современное правило приведения к общему наименьшему знаменателю восходит на Востоке к Абу-л-Вафе, а в Европе к Леонардо Пизанскому, широкое употребление оно получило только в 16-17 вв. Он учит действиям с обыкновенными дробями и их сокращению. Леонардо сообщает ряд способов разложения дроби в сумму двух или нескольких единичных дробей [26]. Леонардо предпочитал во многих случаях производить вычисления при помощи единичных дробей, хотя он хорошо знал и другие виды дробей [12].

Среди действий над дробями особый интерес представляют приведение к общему знаменателю, умножение и деление. Приведение к общему знаменателю важно для деления, сложения и вычитания дробей. Долгое время почти все европейские математики при сложении, вычитании или делении дробей общим знаменателем брали произведение всех знаменателей, причем иногда результат сокращали. Специальное внимание на случай, когда знаменатели слагаемых имеют общий делитель, обратил только Леонардо Пизанский. Леонардо указывает, что общий множитель двух знаменателей нужно брать в общем знаменателе только один раз. Леонардо Пизанский предостерегает от составления общего знаменателя как произведения данных знаменателей и сам образует наименьшее общее кратное последовательно, сначала для знаменателей двух дробей, затем к сумме первых двух дробей прибавляет третью и т.д. Он особо предостерегает от составления общего знаменателя как произведения данных знаменателей и сам образует общее наименьшее кратное последовательно, сначала для знаменателей двух дробей, затем к сумме первых двух дробей прибавляет третью и т.д. Мысль Леонардо в течение нескольких веков оставалась неиспользованной. Подобно ему стали действовать лишь математики 16 в. Новый прием укоренился в 17в. Учение о дробях представляло особые трудности. Удивляло, что при умножении на дробь произведение, которое в случае целого множителя, отличного от 1, больше множимого, оказывается меньше его. Напротив, при делении на дробь частное оказывается больше делимого [12, 26].

Диофант также пользуется дробями. В его «Арифметике» содержится много приемов действий над дробями. Вот одна из задач, записанная в современных символах: Проверить $\frac{96}{x^4+36-12x^2}-\frac{12}{6-x^2}=\frac{12x^2+24}{x^4+36-12x^2}$ [9].

Ученые – математики старались все положения, касающиеся дробных чисел вывести из основных свойств целых чисел. Над дробными числами мы, по особым правилам, совершаем все четыре действия. Складывая, вычитая, умножая и деля дробные числа, мы опять получаем числа или дробные (положительные или отрицательные), или целые [28].

Долгое время правила действий с дробями отличались большой запутанностью. Овладение правилами действий с дробями было связано с большими трудностями и считалось высшей степенью математического образования [17].

Вольф первый в своем руководстве высказывает требование, что законы арифметических действий, установленные для целых чисел, должны обосноваться и для дробей. Методы этого обоснования были разработаны только в 19 веке. Основными из них являются метод, опирающийся на так называемый «принцип постоянства формальных законов», дополненный позднее «методом пар». Суть этого принципа заключается в следующем.

В арифметике целых чисел рассматриваются отношения $a:b$ в случаях, когда число a кратно (не кратно) b, и для таких отношений устанавливаются основные определения понятий равенства, неравенства, больше, меньше, суммы, произведения. Если при этом для отношения $a:b$ сохраняются в силе законы арифметических действий (сочетательность, переместительность и т.д.), то символ $a:b$ можно считать числом, которое называется дробью [12].

Первое описание процесса извлечения квадратного и кубического корней из дроби встречается в Индии. Индийцы познакомились с приемом извлечения корней у китайцев, но они внесли в него заметные изменения. Для индийского алгоритма извлечения квадратных корней характерно постоянное пользование удвоенной частью корня и деления результата пополам. Именно в таком виде алгоритм встречается затем у арабов. При извлечении квадратных корней из дробей с неквадратным знаменателем дробь $\frac{a}{b}$ приводили к виду $\frac{ab}{b^2}$, т.е. $\frac{\overline{a}}{b} = \frac{\overline{ab}}{b}$. Для кубических корней из дробей с неквадратным знаменателем рекомендуется правило $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$. Правило извлечения квадратного корня встречается во второй четверти 12в. в Европе, а для кубического корня – у Леонардо Пизанского [26].

Связь деления с умножением была известна издавна. Математики древности и средних веков при делении обыкновенных дробей приводили оба числа сперва к общему знаменателю, после чего числитель делимого делили на числитель делителя, в общем случае: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd}:\frac{bc}{bd} = ad:bc$. Так поступали древние греки и византийцы, математики арабских стран Мухамед ал-Хорезми и Джемшид ал-Каши и средневековой Европы Леонардо Пизанский и многие позднейшие математики. Только М. Штифель в 1544 г. в «Полной арифметике» вновь сформулировал правило деления на дробь в форме умножения на обратную дробь и специально подчеркнул простоту этого приема [26].

Рассмотрим теперь современные правила арифметических действий с дробями.

При сложении дробей с одинаковыми знаменателями числители складывают, а знаменатель оставляют тот же. Другими словами, с помощью букв записывают так: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$. При вычитании дробей с одинаковыми знаменателями из числителя уменьшаемого вычитают числитель вычитаемого, а знаменатель оставляют тот же. С помощью буквенной записи правило вычитания записывают так: $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$ [5].

Дробные числа можно сравнивать, складывать, вычитать, умножать и делить. Чтобы сравнить (сложить, вычесть) дроби с разными знаменателями, нужно:

1) привести данные дроби к наименьшему общему знаменателю;

2) сравнить (сложить, вычесть) полученные дроби. Из двух дробей с одинаковыми знаменателями меньше та, у которой меньше числитель, и больше та, у которой больше числитель [5,6].

С помощью буквенной записи правило записывают следующим образом: $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{ad+bc}{cd}$

$\frac{a}{c}-\frac{b}{d}=\frac{ad-bc}{cd}$

Соотношение $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ верно, тогда и только тогда, когда b и d одного знака и $ad<cb$. А соотношение $\frac{a}{b}<\frac{c}{b}$ имеет место тогда и только тогда, когда $b>0$ и $a<c$ [17].

Чтобы умножить дробь на дробь, нужно:

1) найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей;

2) первое произведение записать числителем, а второе – знаменателем. Далее выполнить сокращение, если это возможно и необходимо.

С помощью букв это правило выглядит так: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$ [6].

Деление обыкновенных дробей всегда выполнимо, т.е. частное двух обыкновенных дробей есть всегда обыкновенная дробь. Действие деление всегда может быть заменено умножением при помощи обратного числа. Чтобы разделить одну дробь на другую, нужно делимое умножить на число, обратное делителю.

С помощью понятия обратного числа правило деления можно сформулировать с помощью букв так: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$, где $\frac{d}{c}$ есть число, обратное $\frac{c}{d}$ [6, 24].

В настоящее время выделяют следующие свойства обыкновенных дробей:

1. Две обыкновенные дроби $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$ равны тогда и только тогда, когда равны произведения их членов «крест на крест», т.е. когда $m_1\cdot n_2=m_2\cdot n_1$. С помощью этого уравнения можно найти бесконечное множество равных между собой обыкновенных дробей. За основную, нормальную дробь принимают так называемую несократимую дробь. Для приведения любой

обыкновенной дроби к ее основной, нормальной форме, т.е. к форме несократимой дроби, используется особое преобразование дроби – сокращение дроби. Оно заключается в том, что числитель и знаменатель дроби делятся на их наибольший общий делитель [24].

Непосредственно из этого получаем, что для произвольных обыкновенных дробей, справедливы следующие соотношения:

1) $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$;

2) $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$;

3) $\frac{a}{b} = 0$, тогда и только тогда, когда $a = 0$;

4) $\frac{a}{b} = 1$, тогда и только тогда, когда $a = b$ [17].

2. Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и тоже натуральное число, то получится равная ей дробь. Деление числителя и знаменателя на их общий делитель, отличный от единицы, называют сокращением дроби. Дробь называют несократимой, если числитель и знаменатель между собой взаимно простые. Это свойство называют основным свойством дроби.

3. Сложение обыкновенных дробей обладает переместительным и сочетательным свойствами.

4. Умножение обыкновенных дробей обладает переместительным и сочетательным свойствами. А также распределительным свойством умножения относительно сложения и относительно вычитания, которое позволяет упрощать вычисления [6].

Таким образом, правила действий над обыкновенными дробями, особенно сложение и вычитание, очень сложные и неудобные.

Глава II. Методика формирования понятия обыкновенные дроби в средней школе

2.1. Анализ школьных программ и учебников по математике 5-9 классов

В курсе математики 5-11 классов с учетом возрастных особенностей учащихся и сложившихся традиций выделяются две ступени обучения: основная школа (5-9 классы) и старшая школа (10-11 классы). Мы рассмотрим изучение дробей в основной школе, так как именно курс математики 5-9 классов является важным звеном математического образования и развития школьников.

Система знаний является важным компонентом познавательной деятельности, и ее результатом. Формирование и развитие системы знаний происходит постепенно в процессе учебной деятельности [14].

При обучении математике необходимо пользоваться всеми средствами формирования интереса к предмету. Интерес к предмету тесно связан с ясным пониманием (восприятием) учебного материала. Возникновению и развитию мотивации способствует тщательно отобранное содержание материала, вынесенного на урок. Средствами, связанными с содержанием учебного материала, побуждающими формирование мотивации учения, могут быть:

1. Практическая значимость изучаемого материала для ученика.
2. Доступность учебного материала.
3. Новизна.
4. Соответствие содержание учебного материала наличным или вновь возникающим потребностям ребенка.
5. Наглядность и занимательность материала [11].

Нормативным, обязательным для выполнения документом, определяющим основное содержание школьного курса математики, объем подлежащих усвоению учащимися каждого класса знаний, приобретаемых умений и навыков, является учебная программа по математике [15].

В настоящее время ведутся дальнейшие поиски по совершенствованию школьных программ и учебников, по разгрузке их от второстепенного материала, по совершенствованию трактовки школьной математики.

Современному содержанию математического образования должны соответствовать современные методы обучения, которые не противопоставляются традиционным. Их нужно дидактически правильно сочетать в процессе обучения. Современные методы ориентированы не на усвоение готовых знаний, а на обучение самостоятельному приобретению новых знаний [14].

В организации учебно-воспитательного процесса важную роль играют задачи. При планировании уроков следует иметь в виду, что теоретический материал осознается и усваивается преимущественно в процессе решения задач, поэтому в обучении математике они являются и целью, и средством обучения и математического развития школьников. Организуя решение задач целесообразно шире использовать дифференцированный подход к учащимся, основанный на достижении обязательного уровня подготовки. Это способствует нормализации нагрузки школьников, обеспечивает их посильной работой и формирует у них положительное отношение к учебе. В ходе решения задач - основной учебной деятельности на уроках математики - развиваются творческая и прикладная стороны мышления [1,15,23].

В 5-6 классах курс изучения материала строится на индуктивной основе с привлечением элементов дедуктивных рассуждений. Теоретический материал курса излагается на наглядно-интуитивном уровне, математические методы и законы формулируются в виде правил. В ходе изучения курса учащиеся развивают навыки вычислений, действий с обыкновенными дробями, получают начальные представления об использовании букв для записи выражений и свойств арифметических действий.

В 7-9 классах курс характеризуется повышением теоретического уровня обучения, постепенным усилением роли теоретических обобщений и дедуктивных заключений. Прикладная направленность курса обеспечивается систематическим обращением к примерам, раскрывающим возможности применения математики к изучению действительности и решению практических задач [15].

Введение дробных чисел в курсе математики является, по существу, для учащихся первым расширением понятия числа. Программой предусматривается изучение дробных чисел в 5-6 классах. В настоящее время программой отводится на изучение математики в 5-х и 6-х классах по 6 уроков в неделю.

Процесс обучения обусловлен целями образования и представляет собой целостную систему определенной структуры. Процесс обучения математике должен строиться подобно процессу исследования в математике, он должен имитировать процесс творческого поиска в математике. Принципы обучения постоянно углубляются и видоизменяются в соответствии с теми задачами, которые ставит перед школой общество.

Основные источники получения дробных чисел в практике человека, определяющие соответственно различные пути их введения:

1. Дробные числа появляются как результат измерения величин.

2. Разделение предметов множества в природе и технике на доли (равные части), в результате образуется множество долей первоначально взятых предметов.

3. Дробные числа получаются в результате деления одного числа на другое.

В разных местах учебника 5-6 класса рассматриваются все три источника получения дробных чисел. Так, используя второй путь, впервые вводится понятие обыкновенной дроби, несколько позднее показывается, что с помощью дробей можно всегда записать результат деления двух любых натуральных чисел, независимо от того, делится первое число на второе или не делится [25].

В современном развитии математики все большее значение приобретают именно ее опосредованные связи с практикой через другие естественные науки.

Исторически сложились две стороны назначения математического образования: практическая, связанная с созданием и применением инструментария, необходимого человеку в его продуктивной деятельности, и духовная, связанная с мышлением человека, с овладением определенным методом познания и преобразования мира математическим методом.

Практическая полезность математики обусловлена тем, что ее предметом являются фундаментальные структуры реального мира: пространственные формы и количественные отношения - от простейших, усваиваемых в непосредственном опыте людей, до достаточно сложных, необходимых для развития научных и технологических идей. Для жизни в современном обществе важным является формирование математического стиля мышления, проявляющегося в определенных умственных навыках [15].

С дробными числами учащимся приходится значительно чаще встречаться в окружающей жизни. В настоящее время последовательность изучения обыкновенных дробей следующая: изучаются некоторые сведения об обыкновенных числах, необходимые для введения десятичных дробей, а позже изучаются обыкновенные дроби [5,6].

В математической науке имеются различные теории дробей. В практике преподавания основным методом изучения новых чисел, в частности дробных, являются поясняющие описания, которые опираются на знания, жизненный опыт учащихся. Поясняющие описания не заменяют определений, понятий, а лишь показывают целесообразность их введения.

Каждый этап развития понятия числа в школе состоит из двух частей:

1) мотивировка;

2) подтверждение.

Такова структура поясняющих описаний. Мотивировка введения нового числа опирается обычно на жизненный опыт учащихся. Так, введение дробных чисел связывается с изменением, делением целого на части. Мотивировка может быть алгебраической, практической. Подтверждение факта расширения, связанное, прежде всего с соответствующими задачами, обычно хуже представлено в школьных учебниках, чем мотивировка введения новых чисел. Введение дробных чисел в школьном курсе математики связывается с необходимостью более точного измерения величин, с делением чисел. В связи с этим целесообразно познакомить учащихся с возникновением дробных чисел в процессе практической деятельности человека, а именно в процессе измерения [3].

Так в 5 классе, согласно программе и учебнику по математике формирование понятия обыкновенные дроби начинается с умения получать доли при делении какой – либо величины на несколько равных частей. Учащимся сообщается, что для выражения одной или нескольких долей предмета нужны новые числа, а именно дроби. Учащимся необходимо научиться понимать, что такое доля, половина, треть и четверть, уметь записывать дроби, изображать дроби на координатном луче. Учащиеся должны уметь называть и показывать доли отрезка, круга и других предметов. Уделяется внимание в учебниках получению дроби, возникновению дроби в связи с необходимостью более точного измерения и деления натуральных чисел. Далее приводятся примеры обыкновенных дробей, и дается форма записи обыкновенной дроби. Далее учащиеся учатся сравнивать дроби, вырабатывают навык в сравнении дробей. Вопрос о сравнении дробей рассматривается в неразрывной связи с основным свойством дроби. Немаловажной темой для изучения обыкновенных дробей является тема: «Правильные и неправильные дроби». Учащиеся должны научиться определять правильные и неправильные дроби, сравнивать их с единицей. На изучение этих тем в целом отводится 9 часов. Чтобы проверить усвоение этих тем проводится контрольная работа [5,13].

В 5 классе учащиеся впервые учатся выполнять арифметические действия над обыкновенными дробями, имеющими одинаковые знаменатели.

В итоге обучающиеся умеют формулировать правила сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями и применять это правило при выполнении действий. Также учащиеся умеют записывать результат деления в виде дроби, натуральное число в виде дроби, делить сумму на число. На изучение этих тем отводится 5 часов.

В данных темах изучаются сведения о дробных числах, необходимые для введения десятичных дробей. Среди формируемых умений основное внимание должно быть привлечено к сравнению дробей с одинаковыми знаменателями, к выделению целой части числа [13].

Выделяют следующее требование к математической подготовке учащихся: в результате изучения курса математики в 5 классе учащиеся должны правильно употреблять термины, связанные с дробными числами и способами их записи, сравнивать дроби, выполнять арифметические действия с обыкновенными дробями [3].

Тема «Обыкновенные дроби» является основным содержанием курса математики 6 класса. На ее изучение отводится 38 часов. Изучение ее связано с определенными трудностями теоретического и методического плана, обусловленными расширением понятия числа, новыми алгоритмами действий.

Согласно программе сначала время уделяется на выработку навыков действий над положительными обыкновенными дробями, отрицательные числа вводятся позднее и постепенно.

Трудной проблемой в курсе учения о дробном числе является вопрос о сложении и вычитании дробей с разными знаменателями. Этой теме посвящена целая глава.

Изучение дробей в 6 классе начинается с темы: «Основное свойство дроби». К началу изучения этого пункта учащиеся накопили опыт работы с обыкновенными дробями. В частности, они научились сравнивать дроби с одинаковыми знаменателями. Им уже встречались разные дроби, выражающие одно и тоже число. В этом пункте учащиеся впервые серьезно встречаются с различными обозначениями одного и того числа в одной и той же системе обозначений. Основное свойство дроби, сформулированное в объяснительном тексте пункта, заключается в том, что, умножая или деля числитель и знаменатель дроби на одно и тоже натуральное число, получится равна ей дробь [6]. Учащиеся должны научиться формулировать основное свойство дроби, находить дроби, равные данной. Материал этого параграфа очень важен, поскольку со временем он будет использоваться достаточно часто. Основное свойство дроби нужно разъяснить как можно нагляднее. Важно, чтобы учащиеся поняли, что с помощью основного свойства дроби данную дробь можно заменить на равную ей дробь со знаменателем, кратным знаменателю данной дроби.

Далее учащиеся учатся сокращать дроби. Учащиеся должны научиться сокращать дроби, определять, является ли данная дробь несократимой. Учащиеся должны четко понимать, что целью сокращения дробей является получение несократимой дроби.

Также очень важно, чтобы обучающиеся научились приводить дробь к новому знаменателю и наименьшему общему знаменателю. Умение приводить дроби к общему знаменателю станет основой для сравнения дробей и выполнения действий сложения и вычитания дробей с разными знаменателями. Учащиеся должны научиться сравнивать дроби с разными знаменателями, складывать и вычитать обыкновенные дроби с разными знаменателями. При овладении навыками выполнения действий с обыкновенными дробями учащиеся используют умения преобразовывать дроби, приводить дроби к общему знаменателю, сокращать дроби.

Необходимо добиться, чтобы у обучающихся выработались прочные навыки преобразования дробей, сложения и вычитания дробей. Одним из важнейших результатов обучения является усвоение основного свойства дроби, применяемого для преобразования дробей: сокращения, приведения к новому знаменателю. При этом рекомендуется излагать материал без опоры на понятия НОД и НОК. Умение приводить дроби к общему знаменателю используется для сравнения дробей. При рассмотрении действий с дробями используются правила сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями. Важно обратить внимание на случай вычитания дроби из целого числа [13].

К правилу сложения обыкновенных дробей с разными знаменателями учащиеся уже подготовлены и могут быть подведены путем:

1. Повторения сложения дробей с одинаковыми знаменателями (при малейшем затруднении используется наглядность – изображение дроби как части отрезка, прямоугольника, круга).

2. Приведение дроби к новому знаменателю.

Практика показывает, что следует различать отдельные случаи сложения и вычитания обыкновенных дробей с разными знаменателями.

Изучение этого материала лучше проходить в такой последовательности:

1. Сложение положительных дробей, если знаменатель одной из дроби кратен остальным.

2. Сложение положительных дробей, знаменатели которых взаимно-простые числа.

3. Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю и сложение дробей.

4. Применение законов арифметических действий к сложению чисел, содержащих целые и дробные части.

5. Вычитание положительных дробей.

6. Замена единицы дробью при вычислении.

7. Вычитание чисел, содержащих целую и дробную часть.

8. Сложение и вычитание рациональных чисел.

Для проверки уровня знаний проводится контрольная работа.

Далее учащиеся должны научиться умножать и делить обыкновенные дроби. Изучению этих тем также посвящена целая глава.

Изучение умножения и деления обыкновенных дробей в учебнике начинается с вывода общего правила умножения дроби на дробь. Все остальные правила умножения вытекают, как частные случаи. Недостатком при этом является то, что нельзя пояснить, какой вкладывается смысл в это действие, что значит умножить на дробь. Основное внимание сосредотачивается на получении и усвоении учащимися правила умножения дроби на дробь.

Правило умножения дроби на целое число и целого числа на дробь вытекает из общего правила умножения дробей, если целое число представить в виде дроби со знаменателем 1. Правда, учащиеся уже знают, что умножить на натуральное число это значит найти сумму одинаковых слагаемых. Поэтому с появлением нового правила может возникнуть трудность психологического характера, которая может быть преодолена путем проверки положения, что известные правила не противоречат друг другу.

Деление дробей не вызовет у учащихся трудностей, если будет хорошо усвоено и вовремя повторено понятие взаимно обратных чисел, законы умножения, смысл деления чисел. Формулируется общее правило деления дроби на дробь: чтобы разделить одно число на другое, надо делимое умножить на число, обратное делителю.

Следует обратить внимание учащихся на связь нового материала с ранее изученным. Здесь важно подчеркнуть, что действие деление дробей сводится к действию умножение дробей. При выполнении примеров на нахождение значения выражения, содержащего несколько действий с дробями, следует показать целесообразность сокращения дробей в ходе выполнения вычислений.

При изучении темы: «Нахождение дроби от числа», прежде всего, надо уделить внимание наглядной демонстрации учащимся понятия нахождения дроби от числа и его практическому использованию. Нужно уделить особое внимание наглядному пояснению алгоритма нахождения числа по его дроби. Учащиеся должны четко усвоить, в каких случаях применяется алгоритм нахождения дроби от числа, а в каких – нахождение числа по его дроби. Этому поможет большое количество разнообразных текстовых задач. Также показываются формальные приемы решения этих задач путем умножения или деления на дробь [13].

При решении задач нахождения доли числа и числа по его дроби учащиеся должны отчетливо понимать дробь как результат деления целого на равные доли и взятия нескольких таких долей. Если не опираться на понятие обыкновенной дроби, то суть этих задач остается неясной учащимся [3].

Позже вводится понятие положительных и отрицательных чисел. При изучении данной темы целенаправленно отрабатываются алгоритмы сложения и вычитания, умножения и деления при выполнении действий с дробными числами. При овладении приемами действий с обыкновенными дробями учащиеся используют навыки преобразования дробей (приведения к общему знаменателю и сокращению дробей) [6].

Основная цель изучения - выработать прочные навыки арифметических действий с обыкновенными дробями и решения основных задач на дроби. В этой теме завершается работа над формированием навыков арифметических действий с обыкновенными дробями. Навыки должны быть достаточно прочными, чтобы учащиеся не испытывали затруднений в вычислениях с рациональными числами, чтобы алгоритмы действий с обыкновенными дробями могли стать в дальнейшем опорой для формирования умений выполнять действия с алгебраическими дробями. Расширение аппарата действий с дробями позволяет решать текстовые задачи, в которых требуется найти дробь от числа или число по данному значению его дроби, выполняя соответственно умножение или деление на дробь [13].

Знания, накопленные об обыкновенных дробях, используются для дальнейшего изучения курса алгебры. В 7 классе в главе «Выражения. Тождества, уравнения» также мы встречаем действия с дробями. Например, нужно найти число, обратное числу. Практически на каждом шагу изучении математики мы встречаемся с арифметическими действиями над дробными числами. Например, дробные числа используются и в решении уравнений [18].

В 8 классе происходит дальнейшее изучение дробей. Появляются рациональные дроби. Этой теме посвящена целая глава. Также эта тема встречается при решении дробных рациональных уравнений и при решении текстовых задач. Решение задач способствует развитию мышления учащихся, более глубокому усвоению идеи функциональной зависимости, повышает вычислительную культуру [19].

В 9 классе обучающиеся продолжают не только решать дробные рациональные уравнения, но и учатся решать дробные неравенства. Этим темам посвящена целая глава [20]. Как мы видим, дроби изучаются на всем протяжении школьного курса математики.

Тема обыкновенные дроби очень важна. В 9 классе при сдаче ОГЭ при выполнении заданий встречаются дроби. Учащимся необходимо либо найти значение дробного выражения, либо сначала упростить выражение, а потом найти его значение при заданных значениях переменных, либо расположить числовые выражения в порядке возрастания (убывания), либо сравнить дробные выражения (Приложение).

Таким образом, при изучении школьного курса математики, как и при строительстве любого здания, важен основательный, прочный фундамент, иначе, каким бы ни было дальнейшее строительство, здание не будет устойчивым. Необходимо обеспечить достаточное общее и специальное математическое развитие учеников.

В содержании математического образования, в результатах, которые должны быть получены в процессе обучения, можно выделить следующие аспекты:

1. Совокупность необходимой для усвоения и запоминания информации.

2. Система выводимых одно из другого понятий.

3. Совокупность приобретаемых оперативных навыков.

4. Система взаимосвязанных способностей.

Нарушение этого требования влечет за собой отрицательные последствия, и прежде всего возникновение формализма в математической подготовке учащихся. Приобретаемые учащимися знания становятся опорой для осознанного приобретения необходимых практических навыков; получаемые практические навыки, не подкрепленные знаниями, быстро утрачиваются или применяются там, где это применение не является необходимым и даже не имеет смысла [25].

2.2. Методические рекомендации по развитию познавательной активности у школьников при изучении темы «Обыкновенные дроби»

Математическое образование вносит свой вклад в формирование общей культуры человека. Цели обучения математике в общеобразовательной школе определяются ее ролью в развитии общества в целом и формировании личности каждого отдельного человека. Роль математической подготовки в общем образовании современного человека ставит следующие цели обучения математике в школе:

1) овладение конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности, для изучения смежных дисциплин, для продолжения образования;

2) интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых для продуктивной жизни в обществе;

3) формирование представлений об идеях и методах математики, о математике как форме описания и методе познания действительности;

4) формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, понимания значимости математики для общественного прогресса.

Развитие интереса к математике является важнейшей целью учителя. Важным условием правильной организации учебно - воспитательного процесса является выбор учителем рациональной системы методов и приемов обучения, ее оптимизация с учетом возраста учащихся, уровня их математической подготовки, развития общеучебных умений, специфики решаемых образовательных и воспитательных задач [1,15].

Мероприятие по математике 6 класс

Тема: «Обыкновенные дроби»

Форма: урок-игра «Звездный час»

Цель: развитие личностных качеств обучающихся и активизация их мыслительной деятельности, поддержка и развитие творческих способностей и интереса к предмету.

Задачи:

Учебные:

1. Повысить уровень математического развития обучающихся и расширить их кругозор.

2. Развитие у обучающихся умений работы с учебной информацией, развитие умений планировать и контролировать свою деятельность.

Развивающие:

1. Развивать у обучающихся интерес к занятиям математикой.

2. Выявлять учащихся, которые обладают творческими способностями, стремятся к углублению своих знаний по математике.

3. Развивать речь, память, воображение и интерес через применение творческих заданий.

4. Развитие логического мышления, быстроты реакции, внимания.

Воспитательные:

1. Воспитывать самостоятельность мышления, волю, упорство в достижении цели, чувство ответственности за свою работу перед коллективом.

2. Воспитание умений применять имеющиеся знания в практических ситуациях.

3. Воспитание умений защищать свои убеждения, делать нравственную оценку деятельности окружающих и своей собственной.

4. Воспитание чувства ответственности, коллективизма и взаимопомощи.

Прогнозируемый результат:

1. Эмоциональные переживания, радость победы, огорчение при поражении, удовлетворение или неудовлетворение собой или другими, т. е. проведённое мероприятие не должно оставить учеников равнодушными.

2. Подтверждение имеющихся у обучающихся базовых знаний по математике.

3. Выявление круга учащихся, стремящихся к углублению знаний по математике.

4. Расширение кругозора учащихся в области математики.

5. Развитие коммуникативных умений.

Оборудование: карточки с заданиями, путеводные (маршрутные) листы, ручки, карандаши, фломастеры, грамоты.

Подготовительный этап:

Учитель: подготавливает эмблему машиниста и путеводные (маршрутные) листы, карточки, вопросы, пазлы.

Ход мероприятия

1. Организационный этап (3 мин)

В мероприятии участвуют три команды по 5 человек.

Перед началом игры проводится линейка:

- распределение обучающихся по командам (жеребьевка);

- выбор капитанов команд. Капитан должен быть честным, умеющим подбодрить, помочь, придумать, быть справедливым и умеющим сплотить команду.

Команды выстраиваются во главе с капитаном.

Учитель: Известный писатель Лев Николаевич Толстой сказал:

«Человек есть дробь. Числитель – это достоинство человека, знаменатель – это оценка человеком самого себя. Увеличить свой числитель – свои достоинства – не во власти человека; но всякий может уменьшить свой знаменатель – своё мнение о себе, и этим уменьшением приблизиться к совершенству».

Сегодня к нам в гости зашел Незнайка и задал такой вопрос: «В какой стране были развиты знания об обыкновенных дробях?» Давайте же поможем Незнайке ответить на этот вопрос.

Сегодня каждый из вас унесёт с собой, что-то новое, неизвестное, интересное, познавательное из мира обыкновенных дробей.

Капитану каждой из команд прикалывают эмблему машиниста (рис.4) и выдают путеводный (маршрутный) лист (рис.5), по которому команда совершает путешествие.

Рис.4 Эмблема машиниста

Рис.5 Маршрутный лист

Объявляются условия игры. По сигналу команды расходятся по своим станциям. Время пребывания на каждой станции ограниченно. После прохождения каждой станции команда получает определенное количество кусочков пазла. В конце игры вам необходимо собрать пазл и ответить на вопрос Незнайки, т.е. назвать страну. По сигналу команды переходят на следующую станцию. За временем следит дежурный каждой станции.

Путевой лист делается следующим образом. Вверху страницы пишут, какой команде выдан путевой лист и указывают порядок прохождения станции (для каждой команды он различный). По мере того как команда прибывает на эту или иную станцию, дежурный по станции заполняет путевой лист. В игре семь станций.

2. Основной этап (40 мин)

I станция «Знакомство» (6 мин.)

На эту станцию все команды приходят одновременно. На этой станции команды должны представиться. Они должны придумать название, девиз и нарисовать эмблему (5 мин.).

Выступают команды с приветствиями (1 мин.). Каждой команде выдается кусочек пазла.

II станция «Ребусы» (3 мин.)

На столе у дежурного пять различных ребусов. По сигналу по очереди каждый член команды решает ребус (за каждый верно разгаданный ребус команда получает 1 кусочек пазла). Максимальное количество получения кусочков пазла – 5.

Ответ: числитель

Ответ: дробь

Ответ: обыкновенная

Ответ: знаменатель

Ответ: доля

III станция «Дроби в жизни» (8 мин.)

Пассажиры математического поезда получают карточки с задачами. За каждую верно решенную задачу присуждается кусочек пазла. Максимальное количество получения кусочков пазла – 5.

Задачи:

1. Количество отсутствующих учеников в классе составляет $\frac{1}{6}$ числа присутствующих. После того, как из класса вышел один ученик, число отсутствующих стало равно $\frac{1}{5}$ числа присутствующих. Сколько учеников в классе? Ответ: 42 ученика

2. В двух мешках 140 кг муки. Если из первого мешка переложить во второй $\frac{1}{8}$ часть муки, находящейся в первом мешке, то в обоих мешках муки будет поровну. Сколько муки первоначально было в каждом мешке? Ответ: в первом мешке было 80 кг, а во втором 60 кг.

3. Пассажир, проехав половину всего пути, лёг спать и спал до тех пор, пока не осталось ехать половину того пути, что он проехал спящим. Какую часть пути он проехал спящим? Ответ: Пассажир проспал $\frac{2}{3}$ второй половины пути, т.е. $\frac{1}{3}$ всего пути.

4. Кристина шла на работу. К ней на улице подбежал мальчик и спросил: «Который час?» Кристина, не сомневаясь, ответила: «Четверть

десятого». Сколько же показывают часы? Ответ: часы показывают 9:15.

5. Одна женщина отправилась в сад собирать яблоки. Чтобы выйти из сада, ей нужно было пройти через четыре двери, у каждой из которых стоял стражник. Стражнику у первых дверей женщина отдала половину сорванных ею яблок. Дойдя до второго стражника, женщина отдала ему половину оставшихся яблок. Так же она поступила и с двумя остальными стражниками. Когда она поделилась яблоками с последним из них, у нее осталось лишь 10 яблок. Сколько яблок она собрала в саду? Ответ: 160 яблок

IV станция «Головоломка» (3 мин.)

Как же назывались первые дроби. Чтобы узнать это, вам необходимо отвечать на мои вопросы. За каждый правильный ответ вы получаете букву. По окончанию вы должны назвать слово.

Вопросы:	Буквы:
1. Чему равна одна четвёртая часть часа? (15мин.)	а
2. Может ли при делении получиться ноль? (Да)	л
3. Как называется сотая часть числа? (Процент)	и
4. Как называется верхняя часть дроби? (Числитель)	к
5. Что показывает числитель дроби? (сколько долей взято)	в
6. Как называется результат сложения? (Сумма)	о
7. Может ли при умножении получиться ноль (Да)	т
8. Как называется результат вычитания? (Разность)	н
9. Как называется нижняя часть числа? (Знаменатель)	ы
10. Продли ряд дробей, разгадав его закономерность $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \ldots (\frac{11}{12}, \frac{13}{14})$	е

Слово: аликвотные (обучающиеся получают кусочек пазла за отгаданное слово).

Чтобы узнать, где появились аликвотные дроби и получить еще один кусочек пазла вам необходимо помочь незнайке.

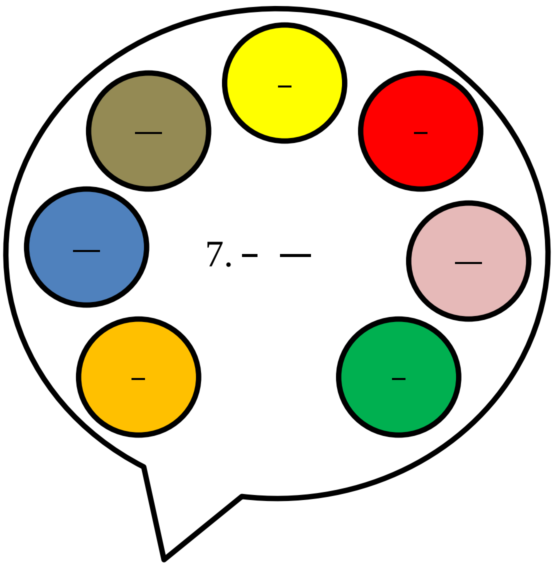
Незнайка решил начать новую жизнь. Он составил себе такое расписание на сутки: $\frac{1}{6}$ часть суток – чтение книг; $\frac{3}{8}$ – совершение добрых дел; $\frac{1}{12}$ – на прием пищи (завтрак, обед, ужин); $\frac{2}{8}$ суток на занятие спортом; 8 часов на сон. Выполним ли его план? Ответ: нет.

Если команда помогла незнайки, то дежурный по станции рассказывает, где же появились аликвотные дроби. Они появились в Египте.

Если обучающиеся отвечают верно, то также получают еще один кусочек пазла.

<u>V станция «Художники» (8 мин.)</u>

Незнайке снова нужна ваша помощь. Вычислите примеры, соотнесите ваши ответы с ответами на палитре и раскрасьте картинку. Цифры 1,2,3,4,5,6,7 на картинке соответствуют номерам примеров, а цвета красок - правильным ответам. При правильном раскрашивании дается кусочек пазла.



Вычислить:

1. $\frac{3}{7}+\frac{2}{9}$ 3. $\frac{8}{11}-\frac{2}{3}$ 5. $\frac{2}{3}\cdot\frac{21}{6}$

2. $\frac{1}{15}+\frac{2}{15}$ 4. $\frac{10}{21}-\frac{4}{21}$ 6. $\frac{7}{12}:\frac{7}{4}$

Ответ: 1.-синий, 2.-желтый, 3.-коричневый, 4.-зеленый, 5.-оранжевый, 6.-красный, 7.-розовый.

VI станция «Древняя Русь» (1 мин.)

Как же на Руси называли дроби. Соотнесите вид дробей и их старинные названия. При правильном соотношении дается кусочек пазла.

$\frac{1}{2}$ – половина, полтина

$\frac{1}{4}$ – четь

$\frac{1}{8}$ – полчеть

$\frac{1}{7}$ – седьмина

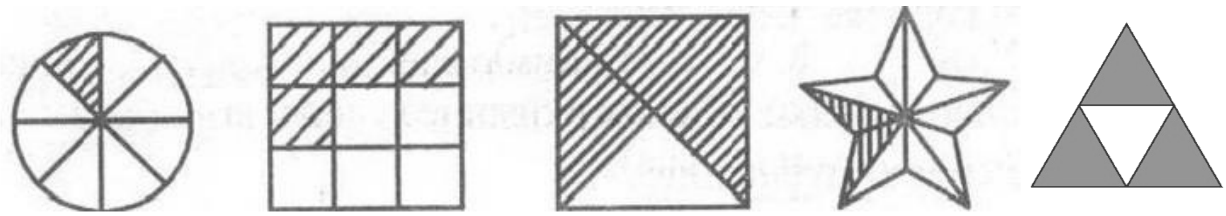
$\frac{1}{3}$ – треть

$\frac{1}{5}$ – пятина

$\frac{1}{10}$ – десятина

VII станция «Фигуры» (1 мин.)

Какая часть фигуры заштрихована? Назовите закрашенную часть дробью. За каждое верное название команда получает кусочек пазла, максимальное количество получения кусочков пазла – 5.



Ответ: $\frac{1}{8}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{3}{4}$

После прохождения станций все команды возвращаются в пункт отправления. По сигналу они собирают пазл и пишут название страны (Индия) (рис. 6).

Рис.6 Пазл «Индия»

3. Заключительный этап. Рефлексия (2 мин)

Итог игры, награждения. Первая команда, которая называет верно страну, является победителем игры. Все команды награждаются грамотами.

А сейчас закончите предложения:

- Сегодня я узнал…

- Сегодня я вспомнил….

- Мне понравилось…

- Я хотел бы…

Я хочу поблагодарить всех участников за активное участие в мероприятии. Желаю всем хорошего настроения и удачи!

Заключение

В настоящей работе показана необходимость и важность использования обыкновенных дробей.

В работе нашли решение следующие конкретные задачи, выдвинутые в связи с исследованием проблемы обоснования педагогических условий формирования познавательной активности обучающихся на уроках математики, и получены следующие основные результаты:

1. Рассмотрена история развития понятия обыкновенной дроби, раскрыта сущность этого понятия.

Еще задолго до того, как люди узнали о бесконечности натурального ряда, они в труде прокладывали пути к новым числам, отличным от натуральных, к дробным. Дробные числа отвечают практическим потребностям измерения и деления целого на части и теоретическим потребностям деления любых целых чисел.

Понятие дроби с течением веков развивалось и расширялось. В современной арифметике дробью называют пару натуральных чисел, одно из которых (знаменатель) показывает, на сколько равных долей разделен элемент, а другое (числитель) – сколько таких долей взято. До сих пор, учение о дробях считается трудным разделом арифметики.

2. Изучены арифметические действия над обыкновенными дробями и их свойства в разные периоды времени. Люди на практике открывали связи между числами и устанавливали правила действий над ними. С дробными числами можно выполнять следующие арифметические действия: сравнение, сложение, вычитание, умножение и деление. В настоящее время придерживаются следующих правил:

1) чтобы сравнить (сложить, вычесть) дроби нужно:

а) привести данные дроби к наименьшему общему знаменателю,

б) сравнить (сложить, вычесть) полученные дроби;

2) чтобы умножить дробь на дробь, нужно:

а) найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей,

б) первое произведение записать числителем, а второе – знаменателем;

3) чтобы разделить одну дробь на другую, нужно делимое умножить на число, обратное делителю.

Дробные числа подчиняются тем же законам, что и целые, а именно переместительному, сочетательному и распределительному. Всякое натуральное является частным видом дробного числа.

3. Рассмотрена методика формирования понятия «Обыкновенная дробь» в средней школе. Программой предусматривается изучение дробных чисел в 5-6 классах. Но как мы видим, дроби изучаются на всем протяжении школьного курса математики. Тема обыкновенные дроби очень важна. В настоящее время ведутся дальнейшие поиски по совершенствованию школьных программ и учебников, по разгрузке их от второстепенного материала, по совершенствованию трактовки школьной математики.

4. Представлены методические рекомендации по формированию познавательной активности у школьников на уроках математики в процессе изучения темы: «Обыкновенная дробь». Игра помогает учителю сплотить ученический коллектив, включить в активную деятельность замкнутых и застенчивых учащихся, сформировать у школьников познавательную активность на уроках. Использование разработанной методики по формированию познавательной активности обучающихся способствует совершенствованию учебного процесса, позволяет развивать у учащихся творческие способности, дает возможность повысить качества знаний по данной теме, способствует осуществлению активных действий обучающихся.

Практическая значимость данной работы заключается в том, что содержащееся в исследовании обоснование педагогических условий формирования познавательной активности обучающихся на уроках математики системой предложенных методов и организации форм обучения позволяет целенаправленно совершенствовать процесс обучения в общеобразовательной школе. Результаты работы, включая разработку мероприятия по теме «Обыкновенные дроби», могут быть использованы учителями образовательных учреждений, студентами – практикантами в практической работе со школьниками.

Литература

1. Автономова, Т.В. Практикум по методике преподавания математики в средней школе: учебное пособие для студентов физико-математических фак. пед. ин-тов / Т.В. Автономова [и др.]; под ред. В.И. Мишина. - М.: Просвещение, 1993. - 191 с.
2. Березкина, Э.И. О «Математике в девяти книгах» / Э.И. Березкина. В кн.: Историко-математические исследования. - М.: ГИТТЛ. - № 10, 1957.- 427–438с.
3. Блох, А.Я. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика: учебное пособие для студентов физико-математических специальностей / А.Я. Блох [и др.]; сост. В.И. Мишин. - М.: Просвещение, 1987. - 416 с.
4. Василенко, Ю.К. История и методология математики: курс лекций / Ю.К. Василенко, под ред. Л.Л. Коцарева. - Белгород: ИПЦ «Политерра», 2015. - 192с.
5. Виленкин, Н.Я. Математика. 5 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Н.Я. Виленкин [и др.]. - 31-е изд., стер.- М.: Мнемозина, 2013. - 280с.
6. Виленкин, Н.Я. Математика. 6 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Н.Я. Виленкин [и др.]. - 30-е изд., стер.- М.: Мнемозина, 2013. - 288с.
7. Выгодский, М.Я. Арифметика и алгебра в Древнем мире / М.Я. Выгодский. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: Наука, 1967. - 368 с.
8. Глейзер, Г.И. История математики в школе: IV-VI классы: пособие для учителей / Г.И. Глейзер. - М.: Просвещение, 1981. - 239 с.
9. Глейзер, Г.И. История математики в школе: VII - VIII кл. Пособие для учителей / Г.И. Глейзер. - М.: Просвещение, 1982. - 240с.
10. Глейзер, Г.И. История матаматики в школе / Г.И. Глейзер; под ред. В.Н. Молодшего. - М.: Просвещение, 1964. - 375 с.

11. Гусев, В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике: для студентов педагогических вузов / В.А. Гусев. - М.: Вербум-М, 2003. - 430 с.

12. Депман, И.Я. История арифметики: пособие для учителей / И.Я. Депман. - М.: Учпедгиз, 1959. - 424 с.

13. Жохов, В.И. Обучение математике в 5-6 классах. Методическое пособие для учителя к учебникам Н.Я. Виленкина, В.И. Жохова и др. / В.И. Жохов. - 2-е изд. - М.: Мнемозина, 2015. - 328 с.

14. Каплан, Б.С. Методы обучения математике: Некоторые вопросы теории и практики / Б.С. Каплан, Н.К. Рузин, А.А. Столяр; под ред. А.А. Столяра. - Минск: Народная асвета, 1981. - 192 с.

15. Кузнецова, Г.М. Математика: 5-11 классы: программы; тематическое планирование / сост.: Г.М. Кузнецова, Н.Г. Миндюк. - М.: Дрофа, 2000. - 320 с.

16. Кольман, Э. История математики в древности / Э. Кольман; отв. ред. Б.А. Розенфельд; АН СССР, Ин-т истории естествознания и техники. - М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1961. - 235 с.

17. Ляпин, Е.С. Алгебра и теория чисел: учебное пособие для студентов физико-математических фак. пед. ин-тов. ч. I: Числа / Е.С. Ляпин, А.Е. Евсеев. - М.: Просвещение, 1974. - 384 с.

18. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев [и др.]; под ред. С.А. Теляковского. - М.: Просвещение, 2013. - 256 с.

19. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев [и др.]; под ред. С.А. Теляковского. - М.: Просвещение, 2013. - 287 с.

20. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев [и др.]; под ред. С.А. Теляковского.- 21-е изд.- М.: Просвещение, 2014. - 271 с.

21. Рыбников, К.А. История математики: учебное пособие для

математических специальностей ун-тов и пед. ин-тов / К.А. Рыбников; рец.: Б.Л. Лаптев, А.Б. Шидловский, И.Г. Башмакова. - 2-е изд., перераб. - М.: МГУ, 1974. - 455 с.

22. Стройк, Д.Я. Краткий очерк истории математики / Д.Я. Стройк; пер. с нем. и доп. И.Б. Погребысского. - 3-е изд. - М.: Наука, 1978. - 336 с.

23. Темербекова, А.А. Методика преподавания математики: учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по спец. 032100 «Математика» / А.А. Темербекова; рец.: А.И. Есиков [и др.]. - М.: ВЛАДОС, 2003. - 176 с.

24. Фридман, Л.М. Величины и числа: Популярные очерки: Учебно-методическая литература / Л.М. Фридман. - М.: Московский психолого-социальный инситут: Флинта, 2000. - 224 с.

25. Черкасов, Р.С. Методика преподавания математики в средней школе: общая методика: учебные пособия для студентов пед. вузов / сост.: Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. - М.: Просвещение, 1985. - 335 с.

26. Юшкевич, А.П. История математики в средние века / А.П. Юшкевич; отв. ред. Б.А. Розенфельд. - М.: Физико-математическая литература, 1961. - 448 с.

27. Юшкевич, А.П. Историко-математические исследования, вып. XX / АН СССР, Институт истории естествознания и техники; под ред. А.П. Юшкевича. - М.: Наука, 1975. - 382 с.

28. Юшкевич, А.П. Историко-математические исследования, вып. XXXII-XXXIII / отв. ред. А.П. Юшкевич. - М.: Наука, 1990. - 544 с.

Приложение

I. Действия с обыкновенными дробями

1. Найдите значение выражения $18 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 - 20 \cdot \frac{1}{9}$.

Решение. Вынесем общий множитель за скобки:

$$18 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 - 20 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9}\left(18 \cdot \frac{1}{9} - 20\right) = \frac{1}{9} \cdot (-18) = -2.$$

Ответ: −2.

2. Вычислите: $\frac{4}{25} + \frac{15}{4}$.

Решение. Приведём дроби к общему знаменателю:

$$\frac{4}{25} + \frac{15}{4} = \frac{4 \cdot 4 + 25 \cdot 15}{25 \cdot 4} = \frac{16 + 375}{100} = \frac{391}{100} = 3,91.$$

Ответ: 3,91.

3. Вычислите: $\frac{3}{2} - \frac{9}{5}$.

Решение. Приведём дроби к общему знаменателю:

$$\frac{3}{2} - \frac{9}{5} = \frac{3 \cdot 5 - 2 \cdot 9}{2 \cdot 5} = -\frac{3}{10} = -0,3.$$

Ответ: −0,3.

4. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{19}{8} + \frac{11}{12}\right) : \frac{5}{48}.$$

Решение. Приведём в скобках к общему знаменателю и поделим:

$$\left(\frac{19}{8} + \frac{11}{12}\right) : \frac{5}{48} = \frac{19 \cdot 3 + 11 \cdot 2}{24} \cdot \frac{48}{5} = \frac{79 \cdot 48}{24 \cdot 5} = \frac{79 \cdot 2}{1 \cdot 5} = 31,6.$$

Ответ: 31,6.

5. Найдите значение выражения $\frac{12}{20 \cdot 3}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{12}{20\cdot 3}=\frac{1}{5}=0,2.$$

Ответ: 0,2.

6. Найдите значение выражения $\frac{27}{5\cdot 4}$.

Решение. Найдём значение выражения:

$$\frac{27}{5\cdot 4}=\frac{27}{20}=\frac{135}{100}=1,35.$$

Ответ: 1,35.

7. Найдите значение выражения $\frac{1}{\frac{1}{18}-\frac{1}{21}}$.

Решение. Найдём значение выражения:

$$\frac{1}{\frac{1}{18}-\frac{1}{21}}=\frac{1}{\frac{7-6}{126}}=\frac{1}{\frac{1}{126}}=126.$$

Ответ: 126.

II. Рациональные выражения

1. Упростите выражение $7b+\frac{2a-7b^2}{b}$, найдите его значение при $a=9$; $b=12$. В ответ запишите полученное число.

Решение. Упростим выражение:

$$7b+\frac{2a-7b^2}{b}=7b+\frac{2a}{b}-7b=\frac{2a}{b}.$$

Найдём значение выражения при $a=9$, $b=12$:

$$\frac{2a}{b}=\frac{18}{12}=1,5.$$

Ответ: 1,5.

2. Упростите выражение $\frac{a^2+4a}{a^2+8a+16}$ и найдите его значение при $a=-2$. В ответ запишите полученное число.

Решение. Упростим выражение:

$$\frac{a^2+4a}{a^2+8a+16}=\frac{a(a+4)}{(a+4)^2}=\frac{a}{a+4}.$$

При $a = -2$, значение полученного выражения равно $-2:2 = -1$.

Ответ: -1

3. Упростите выражение $\frac{2c-4}{cd-2d}$ и найдите его значение при $c=0,5;\ d=5$. В ответ запишите полученное число.

Решение. Упростим выражение:

$$\frac{2c-4}{cd-2d}=\frac{2(c-2)}{d(\mathrm{c}-2)}=\frac{2}{d}.$$

При $c=0,5;\ d=5$, значение выражения равно 2:5 = 0,4.

Ответ: 0,4.

4. Упростите выражение $\frac{x^2-4}{4x^2}\cdot\frac{2x}{x+2}$ и найдите его значение при $x=4$. В ответ запишите полученное число.

Решение. Упростим выражение:

$$\frac{x^2-4}{4x^2}\cdot\frac{2x}{x+2}=\frac{(x+2)(x-2)}{4x^2}\cdot\frac{2x}{x+2}=\frac{x-2}{2x}.$$

При $x=4$, значение полученного выражения равно 0, 25.

Ответ: 0,25.

5. Упростите выражение $\frac{xy+y^2}{15x}\cdot\frac{3x}{x+y}$ и найдите его значение при $x=18,\ y=7,5$. В ответе запишите найденное значение.

Решение. Упростим выражение:

$$\frac{xy+y^2}{15x}\cdot\frac{3x}{x+y}=\frac{y(x+y)}{15x}\cdot\frac{3x}{x+y}=\frac{y}{5}$$

При $y=7,5$, значение полученного выражения равно 7,5 : 5 = 1,5.

Ответ: 1,5.

6. Представьте в виде дроби выражение $\dfrac{10x}{2x-3}-5x$ и найдите его значение при $x=0,5$. В ответ запишите полученное число.

Решение. Упростим выражение:

$$\frac{10x}{2x-3}-5x=\frac{10x-5x(2x-3)}{2x-3}=\frac{10x-10x^2+15x}{2x-3}=\frac{25x-10x^2}{2x-3}$$

Найдем значение выражения при $x=0,5$:

$$\frac{25\cdot 0,5-10\cdot 0,5^2}{2\cdot 0,5-3}=-\frac{12,5-2,5}{1-3}=\frac{10}{-2}=-5.$$

Ответ: −5.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{64b^2+128b+64}{b}:\left(\dfrac{4}{b}+4\right)$ при $b=-\dfrac{15}{16}$.

Решение. Упростим выражение:

$$\frac{64(b^2+2b+1)}{b}:\frac{4(1+b)}{b}=\frac{64(b+1)^2}{4(b+1)}=16(b+1).$$

Подставим в полученное выражение значение $b=-\dfrac{15}{16}$:

$$16\cdot\left(-\frac{15}{16}+1\right)=16\cdot\frac{1}{16}=1.$$

Ответ: 1.

8. Найдите значение выражения $\left(a+\dfrac{1}{a}+2\right)\cdot\dfrac{1}{a+1}$ при $a=-5$.

Решение. Упростим выражение:

$$\left(a+\frac{1}{a}+2\right)\cdot\frac{1}{a+1}=\frac{a^2+2a+1}{a}\cdot\frac{1}{a+1}=\frac{(a+1)^2}{a(a+1)}=\frac{a+1}{a}.$$

Подставим в полученное выражение значение $a=-5$:

$$\frac{-5+1}{-5}=0,8.$$

Ответ: 0,8.

9. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{a}{3}+\dfrac{3}{a}+2\right)\cdot\dfrac{1}{a+3}$ при $a=6$.

Решение. Упростим выражение:

$$\left(\frac{a}{3}+\frac{3}{a}+2\right)\cdot\frac{1}{a+3}=\frac{a^2+6a+9}{3a}\cdot\frac{1}{a+3}=\frac{(a+3)^2}{3a(a+3)}=\frac{a+3}{3a}.$$

Подставим в полученное выражение значение $a=6$:

$$\frac{6+3}{18}=0,5.$$

Ответ: 0,5.

10. Найдите значение выражения $\frac{a(b-3a)^2}{3a^2-ab}-3a$ при $a=2,18,\ b=-5,6.$

Решение. Раскроем скобки и приведём к общему знаменателю:

$$\frac{a(b-3a)^2}{3a^2-ab}-3a=\frac{(b-3a)^2}{3a-b}-3a=-b+3a-3a=-b.$$

Тем самым, искомое значение не зависит от a. Значение выражения при $b=-5,6$ равно $5,6$

Ответ: 5,6.

11. Упростите выражение $\frac{6c-c^2}{1-c}:\frac{c^2}{1-c}.$ и найдите его значение при $c=1,2.$ В ответе запишите найденное значение.

Решение. Упростим выражение:

$$\frac{6c-c^2}{1-c}:\frac{c^2}{1-c}=\frac{c(6-c)}{1-c}\cdot\frac{1-c}{c^2}=\frac{6-c}{c}.$$

Найдём значение выражения при $c=1,2$:

$$\frac{6-1,2}{1,2}=\frac{4,8}{1,2}=4.$$

Ответ: 4.

12. Упростите выражение $\frac{xy+y^2}{15x}\cdot\frac{3x}{x+y}.$ и найдите его значение при $x=18$ и $y=7,5.$ В ответе запишите найденное значение.

Решение. Упростим выражение:

$$\frac{xy+y^2}{15x}\cdot\frac{3x}{x+y}=\frac{y(x+y)}{15x}\cdot\frac{3x}{x+y}=\frac{y}{5}$$ (при $x\neq 0$ и $x\neq -y$).

Найдём значение выражения при $y=7,5$:

$$\frac{7,5}{5}=1,5.$$

Ответ: 1,5.

13. Найдите значение выражения $\left(\frac{a}{3}+\frac{3}{a}+2\right)\cdot\frac{1}{a+3}$ при a = 6.

Решение. Упростим выражение:

$$\left(\frac{a}{3}+\frac{3}{a}+2\right)\cdot\frac{1}{a+3}=\frac{a^2+9+6a}{3a}\cdot\frac{1}{a+3}=\frac{(a+3)^2}{3a}\cdot\frac{1}{a+3}=\frac{a+3}{3a}$$ (при $a\neq -3$).

Найдём значение полученного выражения при $a=6$:

$$\frac{6+3}{3\cdot 6}=\frac{1}{2}=0,5.$$

Ответ: 0,5.

14. Сократите дробь $\frac{(3x+7)^2-(3x-7)^2}{x}$.

Решение. Сократим дробь:

$$\frac{(3x+7)^2-(3x-7)^2}{x}=\frac{(3x+7-3x+7)(3x+7+3x-7)}{x}=\frac{14\cdot 6x}{x}=84.$$

Ответ: 84.

15. Упростите выражение $\frac{9b}{a-b}\cdot\frac{a^2-ab}{54b}$ и найдите его значение при $a=-63, b=9,6.$ В ответе запишите найденное значение.

Решение. Упростим выражение:

$$\frac{9b}{a-b}\cdot\frac{a^2-ab}{54b}=\frac{a(a-b)}{6(a-b)}=\frac{a}{6}.$$

Найдём значение выражения при $a=-63$: $-\frac{63}{6}=-10,5.$

Ответ: −10,5.

16. Найдите значение выражения $\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{1}{b+a}$ при $a=1, b=\frac{1}{3}.$

Решение. Упростим выражение:

$$\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{1}{b+a}=\frac{b^2-a^2}{ab}\cdot\frac{1}{b+a}=\frac{(b-a)(b+a)}{ab}\cdot\frac{1}{a+b}=\frac{b-a}{ab}.$$

Найдём значение выражения при $a=1, b=\frac{1}{3}:$

$$\frac{\frac{1}{3}-1}{1\cdot\frac{1}{3}}=-\frac{2}{3}\cdot 3=-2.$$

Ответ: −2.

17. Найдите значение выражения $\frac{1}{4x}-\frac{4x+y}{4xy}$ при $x=\sqrt{42}, y=\frac{1}{2}.$

Решение. Упростим выражение:

$$\frac{1}{4x}-\frac{4x+y}{4xy}=\frac{y-4x-y}{4xy}=-\frac{4x}{4xy}=-\frac{1}{y}.$$

Значение выражения при $y=\frac{1}{2}$ равно $-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2.$

Ответ: −2.

18. Найдите значение выражения $\frac{16}{4a-a^2}-\frac{4}{a}$ при $a=-12.$

Решение. Преобразуем выражение:

$$\frac{16}{4a-a^2}-\frac{4}{a}=\frac{16}{a(4-a)}-\frac{4}{a}=\frac{16-4(4-a)}{a(4-a)}=\frac{4a}{a(4-a)}=\frac{4}{4-a}.$$

Подставим значение $a=-12:$

$$\frac{4}{4-(-12)}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}=0,25.$$

Ответ: 0,25.

19. Найдите значение выражения $(a^3-25a)\left(\frac{1}{a+5}-\frac{1}{a-5}\right)$ при $a=-39.$

Решение. Приведём в скобках к общему знаменателю:

$$(a^3-25a)\left(\frac{1}{a+5}-\frac{1}{a-5}\right)=a(a^2-25)\frac{a-5-(a+5)}{(a-5)(a+5)}=a\frac{(a-5)(a+5)\cdot(-10)}{(a-5)(a+5)}=-10a.$$

Подставим значение $a=-39$:

$$-10a=-10\cdot(-39)=390.$$

Ответ: 390.

20. Найдите значение выражения $(x-3):\dfrac{x^2-6x+9}{x+3}$ при $x=-21.$

Решение. Преобразуем выражение:

$$(x-3):\frac{x^2-6x+9}{x+3}=(x-3)\cdot\frac{x+3}{(x-3)^2}=\frac{x+3}{x-3}.$$

Подставим значение $x=-21$:

$$\frac{-21+3}{-21-3}=\frac{-18}{-24}=\frac{3}{4}=0,75.$$

Ответ: 0,75.

21. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{a+2b}{a^2-2ab}-\dfrac{1}{a}\right):\dfrac{b}{2b-a}$ при $a=1,6,\ b=\sqrt{2}-1.$

Решение. Преобразуем выражение:

$$\left(\frac{a+2b}{a^2-2ab}-\frac{1}{a}\right):\frac{b}{2b-a}=\left(\frac{a+2b}{a(a-2b)}-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{2b-a}{b}=\frac{a+2b-(a-2b)}{a(a-2b)}\cdot\frac{-(a-2b)}{b}=-\frac{4b}{ab}=-\frac{4}{a}.$$

Подставим значения $a=1,6$:

$$-\frac{4}{1,6}=-\frac{40}{16}=-2,5.$$

Ответ: −2,5.

22. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{y}{5x}-\dfrac{5x}{y}\right):(y+5x)$ при $x=\dfrac{1}{7},\ y=\dfrac{1}{4}.$

Решение. Преобразуем выражение:

$$\left(\frac{y}{5x}-\frac{5x}{y}\right):(y+5x)=\frac{y^2-25x^2}{5xy}\cdot\frac{1}{y+5x}=\frac{(y-5x)(y+5x)}{5xy\cdot(y+5x)}=\frac{y-5x}{5xy}.$$

Подставим $x = \frac{1}{7},\ y = \frac{1}{4}$:

$$\frac{\frac{1}{4} - \frac{5}{7}}{5 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{7 - 5 \cdot 4}{5} = \frac{-13}{5} = -2,6.$$

Ответ: −2,6.

23. Найдите значение выражения $\frac{8a}{9c} - \frac{64a^2 + 81c^2}{72ac} + \frac{9c - 64a}{8a}$ при *a* = 78, *c* = 21.

Решение. Преобразуем выражение:

$$\frac{8a}{9c} - \frac{64a^2 + 81c^2}{72ac} + \frac{9c - 64a}{8a} = \frac{8a \cdot 8a - (64a^2 + 81c^2) + 9c(9c - 64a)}{72ac}$$

$$\frac{64a^2 - 64a^2 - 81c^2 + 81c^2 - 576ac}{72ac} = \frac{-576ac}{72ac} = -8.$$

Ответ: −8.

24. Найдите значение выражения $\left(\frac{1}{5a} + \frac{1}{7a}\right) \cdot \frac{a^2}{4}$ при *a* = 7,7.

Решение. Упростим выражение:

$$(\frac{1}{5a} + \frac{1}{7a}) \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{7 + 5}{35a} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{12a^2}{35 \cdot 4a} = \frac{3}{35}a.$$

Подставим в полученное выражение значение $a = 7,7$:

$$\frac{3}{35} \cdot 7,7 = 0,66.$$

Ответ: 0,66.

III. Числа

1. Расположите в порядке возрастания: $5\frac{2}{7} - 4\frac{1}{7}$, $1,3 \cdot 0,5$, $4,36 - \frac{37}{10}$.

1) $1,3 \cdot 0,5$, $4,36 - \frac{37}{10}$, $5\frac{2}{7} - 4\frac{1}{7}$ 2) $1,3 \cdot 0,5$, $5\frac{2}{7} - 4\frac{1}{7}$, $4,36 - \frac{37}{10}$

3) $4{,}36-\frac{37}{10}$, $1{,}3\cdot 0{,}5$, $5\frac{2}{7}-4\frac{1}{7}$ 4) $5\frac{2}{7}-4\frac{1}{7}$, $1{,}3\cdot 0{,}5$, $4{,}36-\frac{37}{10}$

Решение. Упростим заданные числовые выражения:

$$5\frac{2}{7}-4\frac{1}{7}=\frac{37}{7}-\frac{29}{7}=\frac{8}{7},$$
$$1,3\cdot 0,5=0,65,$$
$$4,36-\frac{37}{10}=4,36-3,7=0,66.$$

Заметим, что $0,65<0,66<1<\frac{8}{7}.$ Поэтому правильный ответ указан под номером 1.

2. Расположите в порядке убывания: $3\frac{4}{13}-2\frac{9}{13}$, $\frac{5}{21}\cdot\frac{63}{25}$, $\frac{6,5}{4}-1.$

1) $3\frac{4}{13}-2\frac{9}{13}, \frac{5}{21}\cdot\frac{63}{25}, \frac{6,5}{4}-1$ 2) $\frac{6,5}{4}-1, 3\frac{4}{13}-2\frac{9}{13}, \frac{5}{21}\cdot\frac{63}{25}$

3) $\frac{6,5}{4}-1, \frac{5}{21}\cdot\frac{63}{25}, 3\frac{4}{13}-2\frac{9}{13}$ 4) $3\frac{4}{13}-2\frac{9}{13}, \frac{6,5}{4}-1, \frac{5}{21}\cdot\frac{63}{25}$

Решение. Упростим заданные числовые выражения:

$$3\frac{4}{13}-2\frac{9}{13}=\frac{43}{13}-\frac{35}{13}=\frac{8}{13},$$
$$\frac{5}{21}\cdot\frac{63}{25}=\frac{3}{5}=0,6,$$
$$\frac{6,5}{4}-1=0,625.$$

Сравним полученные дроби, приведя их к наименьшему общему знаменателю:

$$\frac{8}{13}=\frac{40\cdot 8}{40\cdot 13}=\frac{320}{520};\qquad \frac{3}{5}=\frac{104\cdot 3}{104\cdot 5}=\frac{312}{520};\qquad \frac{5}{8}=\frac{65\cdot 5}{65\cdot 8}=\frac{325}{520}.$$
$$\frac{3}{5}<\frac{8}{13}<\frac{5}{8}.$$

Правильный ответ указан под номером 2.

IV. Вычисления

1. Найдите значение выражения $\frac{(2\sqrt{6})^2}{36}$.

В ответе укажите номер правильного варианта.

1) $\frac{2}{3}$

2) $\frac{1}{3}$

3) 2

4) 4

Решение. Последовательно получаем:

$$\frac{(2\sqrt{6})^2}{36} = \frac{2^2 \cdot (\sqrt{6})^2}{36} = \frac{4 \cdot 6}{6 \cdot 6} = \frac{4}{6} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{3}.$$

Правильный ответ указан под номером 1.

2. Какое из данных ниже чисел является значением выражения $\frac{6}{(2\sqrt{3})^2}$?

1) 1

2) $\frac{1}{2}$

3) $\frac{1}{3}$

4) $\frac{1}{6}$

Решение. Найдем значение выражения:

$$\frac{6}{(2\sqrt{3})^2} = \frac{6}{4 \cdot 3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Ответ: 2

V. Сравнение чисел

1. Укажите выражение, значение которого является наименьшим.

1) $\frac{2}{0,3}$ 2) $2 \cdot 0,3$ 3) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ 4) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

Решение. Упростим заданные числовые выражения:

$$1) \qquad \frac{2}{0,3} = 2 : \frac{3}{10} = 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{20}{3},$$

$$2) \qquad 2 \cdot 0,3 = 2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

$$3) \qquad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 2} - \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6},$$

$$4) \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}.$$

Сравним полученные дроби, приведя их к наименьшему общему знаменателю:

$$\frac{10 \cdot 20}{10 \cdot 3} = \frac{200}{30}; \qquad \frac{3 \cdot 6}{3 \cdot 10} = \frac{18}{30}; \qquad \frac{5 \cdot 1}{5 \cdot 6} = \frac{5}{30}; \qquad \frac{5 \cdot 5}{5 \cdot 6} = \frac{25}{30}.$$

Наименьшим является третье число.

Правильный ответ указан под номером 3.

2. Запишите в ответе номера верных равенств.

Номера запишите в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

1) $1 : \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ 2) $1,2 \cdot \frac{2}{3} = 0,8$ 3) $\frac{4}{5} + 0,4 = 1,2$ 4) $\frac{0,6}{1 - \frac{2}{3}} = 0,2$

Решение. Найдём значения выражений:

$$1) \qquad 1 : \frac{2}{3} = \frac{3}{2},$$

$$2) \qquad 1,2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{5} = 0,8,$$

$$3) \qquad \frac{4}{5} + 0,4 = 0,8 + 0,4 = 1,2,$$

$$4) \qquad \frac{0,6}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{0,6}{\frac{3-2}{3}} = \frac{0,6}{\frac{1}{3}} = \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{1} = \frac{9}{5} = 1,8.$$

Таким образом, верные равенства указаны под номерами 2 и 3.

Ответ: 23.

3. Каждому выражению поставьте в соответствие его значение:

А. $5-1\frac{4}{5}$ Б. $36:80$ В. $2\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$

1) 3,2 2) 1,75 3) 0,45

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В

Решение. Найдём значения выражений:

$$\begin{aligned} &\text{А)} && 5-1\frac{4}{5}=5-1,8=3,2,\\ &\text{Б)} && 36:80=9:20=45:100=0,45,\\ &\text{В)} && 2\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=\frac{10-3}{4}=1,75, \end{aligned}$$

Искомое соответствие: 1, 3, 2.

Ответ: 132.

4. Запишите в ответе номера выражений, значения которых положительны. *Номера запишите в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.*

1) $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}$ 2) $-(-0,6)\cdot(-0,5)$ 3) $\frac{-2,5-3}{2,5-3}$ 4) $0,3^2-0,3$

Решение. Найдём значения выражений:

$$\begin{aligned} &1) && \frac{2}{3}-\frac{3}{4}=\frac{8-9}{12}=-\frac{1}{12},\\ &2) && -(-0,6)\cdot(-0,5)=-0,3,\\ &3) && \frac{-2,5-3}{2,5-3}=\frac{-5,5}{-0,5}=11,\\ &4) && 0,3^2-0,3=0,09-0,3=-0,21. \end{aligned}$$

Таким образом, искомое выражение указано под номером 3.

5. Соотнесите обыкновенные дроби с равными им десятичными.

А. $\frac{5}{8}$ Б. $\frac{3}{25}$ В. $\frac{1}{2}$ Г. $\frac{1}{50}$

1) 0,5 2) 0,02 3) 0,12 4) 0,625

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В	Г

Решение. Упростим выражения:

$$\begin{array}{ll} \text{А)} & \frac{5}{8} = \frac{625}{1000} = 0,625 \\ \text{Б)} & \frac{3}{25} = \frac{12}{100} = 0,12, \\ \text{В)} & \frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5, \\ \text{Г)} & \frac{1}{50} = \frac{2}{100} = 0,02. \end{array}$$

Искомое соотношение: А — 4, Б — 3, В — 1, Г — 2.

Ответ 4312.

6. Расположите в порядке возрастания: $0,12^2,\ \frac{3}{200},\ \frac{0,6 \cdot 0,35}{15}.$

1) $0,12^2, \frac{3}{200}, \frac{0,6 \cdot 0,35}{15}$ 2) $\frac{3}{200}, 0,12^2, \frac{0,6 \cdot 0,35}{15}$

3) $0,12^2, \frac{0,6 \cdot 0,35}{15}, \frac{3}{200}$ 4) $\frac{0,6 \cdot 0,35}{15}, 0,12^2, \frac{3}{200}$

Решение. Запишем заданные числовые выражения в виде десятичных дробей:

$$0,12^2 = 0,0144,\ \frac{3}{200} = 0,015,\ \frac{0,6 \cdot 0,35}{15} = 0,014.$$

Заметим, что $0,014 < 0,0144 < 0,015.$ Поэтому верный вариант ответа указан под номером 4.

7. Расположите в порядке убывания:

$\frac{61}{100} \cdot 0{,}02, (0{,}11)^2, \frac{3}{1000} + \frac{1}{50} + \frac{1}{10}.$

1) $\frac{3}{1000} + \frac{1}{50} + \frac{1}{10}, (0{,}11)^2, \frac{61}{100} \cdot 0{,}02$ 2) $(0{,}11)^2, \frac{3}{1000} + \frac{1}{50} + \frac{1}{10}, \frac{61}{100} \cdot 0{,}02$

3) $\frac{3}{1000} + \frac{1}{50} + \frac{1}{10}, \frac{61}{100} \cdot 0{,}02, (0{,}11)^2$ 4) $\frac{61}{100} \cdot 0{,}02, (0{,}11)^2, \frac{3}{1000} + \frac{1}{50} + \frac{1}{10}$

Решение. Запишем заданные числовые выражения в виде десятичных дробей:

$$0,61 \cdot 0,02 = 0,0122,\ 0,11^2 = 0,0121,\ \frac{3}{1000} + \frac{1}{50} + \frac{1}{10} = \frac{3+20+100}{1000} = 0,123.$$

Заметим, что $0,123 > 0,0122 > 0,0121.$ Поэтому верный вариант ответа указан по номером 3.

8. Укажите наибольшее из следующих чисел:

1) $0,7$ 2) $\frac{7}{9}$ 3) $\frac{9}{7}$ 4) $\frac{4}{5}$

Решение.

Числа 0,7; $\frac{7}{9}$; и $\frac{4}{5}$ меньше, чем 1. Число $\frac{9}{7}$ больше 1, поэтому оно является наибольшим.

Таким образом, верный ответ указан под номером 3.

9. Укажите наименьшее из следующих чисел:

1) $0,7$ 2) $\frac{7}{9}$ 3) $\frac{9}{7}$ 4) $\frac{4}{5}$

Решение.

Число $\frac{9}{7}$ больше 1. Числа 0,7; $\frac{7}{9}$; $\frac{4}{5}$ меньше, чем 1. Сравним эти дроби: $\frac{4}{5} = 0,8,$ по правилу сравнения дробей $0,7 < 0,8$ и $0,7 < \frac{7}{9}.$

Таким образом, верный ответ указан под номером 1.

10. Укажите выражения, значения которых равны 0,25.

Номера запишите в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

1) $2,5 - \frac{9}{4}$ 2) $3 : 54$

3) $\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{7} : 1\frac{5}{7}$ 4) $\frac{34}{3} - 2,75 : 11$

Решение. Вычислим значение каждого выражения:

$$2,5 - \frac{9}{4} = 2,5 - 2,25 = 0,25,$$

$$3 : 54 = \frac{1}{18} \neq 0,25,$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{7} : 1\frac{5}{7} = \frac{6 \cdot 7}{2 \cdot 7 \cdot 12} = \frac{1}{4} = 0,25,$$

$$\frac{34}{3} - 2,75 : 11 \neq 0,25.$$

Ответ 13.

11. Какому из данных промежутков принадлежит число $\frac{7}{11}$?

1) [0,4; 0,5] 2) [0,5; 0,6] 3) [0,6; 0,7] 4) [0,7; 0,8]

Решение.

Разделим 7 на 11 в столбик, получим 0,636363... Это число лежит в промежутке [0,6; 0,7].

Правильный ответ указан под номером 3.