ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

Методика изучения показательной и логарифмической функций в общеобразовательной школе

Выпускная квалификационная работа студентки
очной формы обучения
направления подготовки 44.04.01 Педагогическое образование
(Математическое образование) группы 02041610
Вишняковой Алины Александровны

Научный руководитель:
доцент
Т.А. Цецорина

Рецензент

Директор МБОУ СОШ №28 г. Белгорода

Е.В. Литвинова

БЕЛГОРОД 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Изучение различных преобразований выражений и формул занимает значительную часть учебного времени в курсе школьной математики. Простые преобразования, опирающиеся на свойства арифметических операций, производятся уже в начальной школе и в IV-V классах. Но основная нагрузка по формированию умений и навыков выполнения преобразований приходится на школьный курс алгебры. Связано это как с быстрым увеличением числа и разнообразия совершаемых преобразований, так и с усложнением деятельности по их доказательству и выяснению условий применимости, с выделением и изучением понятий, преобразований.

Ознакомление учащихся с показательной и логарифмической функциями начиная с изучения свойств степеней и логарифмов.

Курс алгебры знакомит учащихся с понятием степени с рациональным показателем. Таким образом для любого основания степени a (где $a>0$, $a\neq1$). Можно построить функцию: $x\mapsto a^x$, $x\in Q$, область определения которой – множество действительных чисел, необходимо ввести определение, степени с иррациональным показателем. Используемое свойство степени с основным, например, большим единицы (возрастании), рациональное приближение иррационального числа α: $r_1 < \alpha < r_2$. Исходя из графического изображения зависимости показателя степени и значения степени, показывается, что найдется такое значение у, которое будет наибольшим среди всех $a^{r\ 1}$ и наименьшим среди всех $a^{r\ 2}$, которое можно считать значением a^{α} .

На протяжении последних лет Единый Государственный Экзамен стал экзаменом, позволяющим проверить знания выпускников по тому или иному предмету. Успешная сдача единого государственного экзамена по математике является основным способом для поступления в высшее учебное заведение. Для того чтобы сдать этот, без сомнения, тяжелый экзамен нужно долго и упорно готовиться. А чтобы успешно сдать экзамен, нужно многое знать, что, собственно, требуется от экзаменующегося. В материалах выпускных экзаменов, ЕГЭ и на вступительных экзаменах в ВУЗы предлагаются задания, содержащие показательные и логарифмические задачи. Такого типа задания вызывают затруднения у учащихся, популярность этой темы обусловлена удивительными свойствами логарифмических и показательных уравнений и функций, многие из которых совершенно не отражены в школьных учебниках. С понятиями показательная функция и логарифмическая функция ученики начинают знакомиться в старших классах, где они проходят самые азы решения данных уравнений.

Актуальность исследования: анализ материала, посвященного изучению показательной и логарифмической функций в учебных пособиях «Алгебра и начала анализа» для 10 – 11 классов разных авторов, учет целей изучения данных функций, а так же обязательных результатов обучения, связанных с рассматриваемой темой, свидетельствует о том, что перед учителем стоит задача – формировать у учащихся умения изучать функции каждого вида, развивая тем самым общие логарифмические и показательные представления, которые помогут обучающимся при решении не только школьного курса задач, но и при подготовке к ЕГЭ.

Объект исследования: процесс обучения математике.

Предмет исследования: изучение показательной и логарифмической функций в общеобразовательной школе.

Цель моей работы - методика изучения показательной и логарифмической функций и их применение в обучении решению уравнений.

Задачи, необходимые для достижения поставленной цели:

- провести теоретический анализ школьных учебников, интернет-источников, педагогической и методической литературы по теме исследования;

- рассмотреть основные понятия, утверждения, типовые задачи, связанные с показательной и логарифмической функциями в школьном курсе математики;
- рассмотреть различные методики решения типовых задач.

Теоретическая значимость работы заключается в получении знаний, способствующих изучению различных сторон математических понятий показательной и логарифмической функций.

Практическая значимость исследования определяется тем, что учебные материалы, направлены на повышение уровня знаний школьников.

1. Теоретические основы изучения показательной и логарифмической функций

1.1 Образовательные цели изучения темы «Показательная и логарифмические функции»

Изучение темы "Показательная, логарифмическая и степенная функции" в курсе алгебры и начала анализа предусматривает знакомство учащихся с вопросами:

- Обобщение понятия о степени; понятие о степени с иррациональным показателем; решение иррациональных уравнений и их систем; показательная функция, ее свойства и график; основные показательные тождества: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; $(a^x)^y = a^{xy}$
- тождественные преобразования показательных выражений; решение показательных уравнений, неравенств и систем; понятие об обратной функции; логарифмическая функция, ее свойства и график; основные логарифмические тождества:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y;\ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;\ \log_a x^p = p \log_a x$$

- тождественные преобразования логарифмических выражений; решение логарифмических уравнений, неравенств и систем; производная показательной функции; число e и натуральный логарифм; производная степенной функции; дифференциальное уравнение радиоактивного распада.

Основная цель – привести в систему и обобщить имеющиеся у учащихся сведения о степени, ознакомить их с показательной, логарифмической и степенной функциями и их свойствами (включая сведения о числе e и натуральных логарифмах); научить решать несложные показательные и логарифмические уравнения, их системы (содержащие также и иррациональные уравнения).

Рассматриваются свойства и графики трех элементарных функций: показательной, логарифмической и степенной. Систематизация свойств указанных функций осуществляется в соответствии с принятой схемой исследования функций. Достаточное внимание должно быть уделено работе с логарифмическими тождествами: тождественные преобразования логарифмических выражений применяются как при изложении теоретических вопросов курса (например, при выводе формулы производной показательной функции), так и при выполнении различного рода упражнений, например, решение логарифмических уравнений и неравенств.

Приведен краткий обзор свойств степенной функции $y = x^p$ в зависимости от различных значений показателя p.

Особое внимание уделяется показательной функции как той математической модели, которая находит наиболее широкое применение при изучении процессов и явлений окружающей действительности. Рассматриваются примеры различных процессов (например, радиоактивный распад, изменение температуры тела); показывается, что решение дифференциальных уравнений, описывающих эти процессы, является показательная функция. В связи с этим для показательной функции дается формула производной, вывод которой проводится с привлечением интуитивных представлений учащихся.

В ходе изучения свойств показательной, логарифмической и степенной функций учащиеся систематически решают простейшие показательные и логарифмические уравнения и неравенства, а также иррациональные уравнения. По мере закрепления соответствующих умений целесообразно также предлагать им уравнения и неравенства, сводящиеся к простейшим в результате несложных тождественных преобразований.

По закону показательной функции размножалось бы все живое на Земле, если бы для этого имелись благоприятные условия, т. е. не было естественных врагов и было вдоволь пищи. Доказательство тому –

распространение Австралии кроликов, которых там раньше не было. Достаточно было выпустить пару особей, как через некоторое время их потомство стало национальным бедствием. В природе, технике и экономике встречаются многочисленные процессы, в ходе которых значение величины меняется в одно и то же число раз, т. е. по закону показательной функции. Эти процессы называются процессами органического роста или органического затухания. Например, рост бактерий в идеальных условиях соответствует процессу органического роста; радиоактивный распад вещества –процессу органического затухания.

В соответствии с общими целями преподавания математики в школе, сформулируем цели изучения логарифмической функции [13].

Итак, цели изучения логарифмической функции:

1. Обучающие:

a. Дать учащимся элементарные знания основных терминов и понятий темы "Логарифмическая функция".

b. Привить учащимся элементарные навыки применения логарифмической функции.

c. Научить решать задачи на логарифмическую функцию.

2. Развивающие:

a. Привить учащимся интерес к логарифмической функции.

b. Повторить и закрепить базовые понятия теории функции:

- область определения;

- область значений;

- обратная функция и т.д.

c. Учиться обобщать полученные ранее знания о функциях на новый объект - логарифмическую функцию.

3. Воспитательные:

a. Воспитать у учащихся чувство собственного достоинства.

b. Воспитать и развить чувство ответственности перед коллективом за выполнение поставленных задач.

c. Воспитать организаторские и управленческие способности [2].

Использование логарифмов для удовлетворения практических нужд человека стало неотъемлемой частью нашей жизни. Метод использования логарифмов позволяет сократить и облегчить сложные вычисления, также он лежит в основе физических и сейсмологических процессов, протекающих в природе, помогает определить раздражимость человека в той или иной ситуации, даже люди, которые проживают в деревнях и сёлах и держат коров, с легкостью могут применять логарифмы для вычисления веса теленка. Логарифмы можно использовать при нахождении банковского процента по вкладам. Зная процент по вкладам, который предлагают разные банки, можно определить какой из них более выгодный на данный момент.

Применение логарифмической функции можно найти, если рассматривать логарифмическую спираль.

Спираль, по определению - это плоская линия, образованная движущейся точкой, которая удаляется по определенному закону от начала луча, равномерно вращающегося вокруг своего начала. Если начало спирали выбрать за полюс полярной системы координат, то математически спираль может быть представлена с помощью некоторого полярного уравнения r = f(j), где r - радиус-вектор спирали, j - угол, откладываемый на полярной оси, f(j) - некоторая монотонно возрастающая или убывающая положительная функция. В случае с логарифмической спиралью точка удаляется по экспоненциальному закону (, где a - произвольное положительное число).

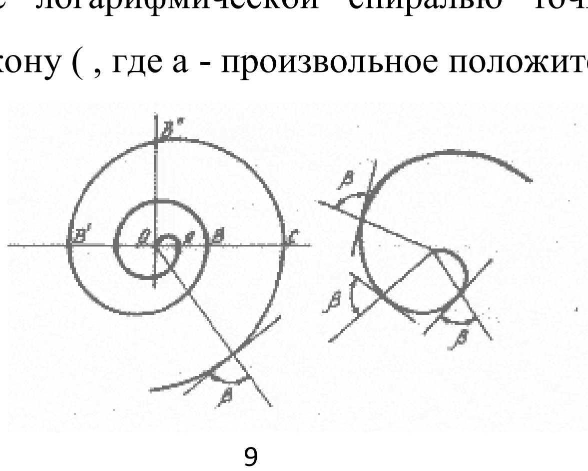


Рис. 2 - логарифмическая спираль.

Если взглянуть на форму многих галактик, то можно обнаружить, что некоторые из них имеют форму логарифмической спирали.

Рис. 3

Галактика млечный путь - типичная спиральная галактика.

Но форму логарифмической спирали имеют не только объекты астрономии, но и например: ракушки многих улиток, рога козлов, паутина паука, семечки подсолнуха.

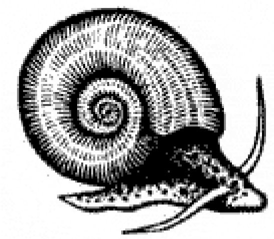


Рис. 4

В физике тоже есть немало примеров применения логарифмической функции и логарифмов.

Например, подобно оценки блеска звезд в предыдущем пункте, оценивается громкость шума. Единицей громкости служит «бел», практически его десятая доля – децибел. Последовательные степени громкости 1 бел, 2 бела и т.д. – составляют для нашего слуха арифметическую прогрессию. Физическая сила этих шумов составляет геометрическую прогрессию со знаменателем 10. Разности громкости в 1 бел соответствует отношение силы шумов 10. Это значит, что выраженная в белах громкость шума, равна десятичному логарифму его физической силы.

Заметим, что в физике, при проведении научных, экспериментальных расчетов показательная, логарифмическая функции, экспонента и логарифмы применяются очень широко, но как правило, не как описание отдельного процесса или комплекса процессов, а входят в состав сложных уравнений и систем уравнений и формул, описывающих данный процесс.

1.2 Содержание и анализ материала по показательной и логарифмической функциям в различных школьных учебниках

Анализ материала, посвящённого показательной и логарифмической функциям в учебнике «Алгебра и начала анализа» для 10-11 классов под ред. А.Н.Колмогорова и в учебнике «Алгебра и начала анализа» для 10-11 классов авторов Ш.А. Алимова и др. свидетельствует, что данные функции представлены в пособиях по математике для средней школы. Значит, перед учителем стоит задача – формировать у учащихся знания о показательной и логарифмической функциях, их свойствах и графиках.

Рассмотрим содержание материала по показательной и логарифмической функций изложенного в различных учебниках по математике за курс 10 – 11 класс средней школы, с целью его сравнения, анализа и формирования наиболее приемлемой методики внедрения данной темы в школьном курсе математики.

Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин и др. Алгебра и начала математического анализа, 10-11.

Учебник разбит на 13 глав. Показательная функция изучается в 3 главе, логарифмическая функция – в 4 главе, что означает изучение данных тем в 10 классе. 1 и 2 глава посвящены действительным числам и степенной функции. Обращаясь к 3 главе, автор начинает повторение основных свойств степени, таким образом вводя понятие показательной функции $y = a^x$. далее Ш.А. Алимов и др. вводят основные три свойства функции:

1. Область определения показательной функции – множество R всез действительных чисел;

2. Множество значений показательной функции-множество всех положительных чисел;

3. Показательная функция $y = a^x$ является возрастающей на множестве всех действительных чисел, если a>1, и убывающей , если 0<a<1 [1].

Далее автор на примере двух функций строит и анализирует их графики. Так же автор показывает использование показательной функции в описании различных физических процессов, на примере радиоактивного распада. И в заключении изучения данной темы автор приводит два примера. Далее в 3 главе автор знакомит обучающихся с показательными уравнениями, неравенствами и системами показательных уравнении и неравенств.

4 глава посвящена логарифмической функции и ее изучение начинается с введение понятия логарифма положительного числа, далее вводятся свойства логарифмов. Далее авторы знакомят обучающихся с десятичными и натуральными логарифмами. Четвертый параграф главы посвящен логарифмической функции ее свойствам и графику. Изучение параграфа начинается с введение понятия логарифмической функции $y = \log_a x$, далее авторы знакомят с основными свойствами логарифмической функции:

1. Область определения логарифмической функции – множество всех положительных чисел;

2. Множество значений логарифмической функции – множество Rвсех действительных чисел;

3. Логарифмическая функция не является ограниченной;

4. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является возрастающей на промежутке (0;+∞), если a>1, и убывающей, если 0<a<1.

5. Если a>1, то функция $y = \log_a x$ принимает положительные значения при x>1, отрицательные при 0<x<1. Если 0<a<1, то функция $y = \log_a x$ принимает положительные значения при 0<x<1, отрицательные при x>1 [1].

Далее рассматривается ход построения графика логарифмической функции и рассматривается три примера решения уравнений и неравенств.

Затем изучаются логарифмические уравнения, неравенства.

С.М. Никольский, М.К. Потапов и др. Алгебра и начала математического анализа, 10.

Учебник разбит на три главы. Показательная и логарифмические функции изучаются в первой главе «Корни, степени, логарифмы». Прежде чем приступить к изучению показательной функции, авторы изучают действительные числа, рациональные уравнения и неравенства, корень степени n, степень положительного числа.

Изучение показательной функции начинает с рассмотрения функции $y = a^x$. Рассматривается ее график и свойства. Тем самым авторы приходят к определению показательной функции. Затем показывают график показательной функции и ее свойства. Так же в этом параграфе автор вводит понятие экспоненты.

Изучение логарифмической функции так же как и в учебнике Ш.А. Алимова начинается с введения понятия логарифма, далее изучаются его свойства и затем авторы переходят к логарифмической функции. После введения понятия логарифмической функции авторы показывают график данной функции, затем показывают каким свойствами обладает функция $y = \log_a x$ при $a > 1$:

1. Непрерывна и возрастает на промежутке (0;+∞);

2. Если $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$; если $x \to 0$, то $y \to -\infty$.

Если 0<a<1 то функция обладает следующими свойствами:

1. Непрерывная и убывает на промежутке (0;+∞);

2. Если $x \to +\infty$ то $y \to -\infty$; если $x \to 0$, то $y \to +\infty$. [19]

Далее автор знакомит обучающихся с понятием десятичного логарифма и степенной функции. В данном учебном пособии не вводится понятия натурального логарифма, как например в учебнике Ш.А. Алимова.

А.Н. Колмагоров, А.М. Абрамов и др. Алгебра и начала анализа, 10-11.

Учебник разбит на 6 глав. Показательная и логарифмическая функции изучаются в 4 главе. В отличии от предыдущих авторов, А.Н. Колмагоров 1 главу посвятил тригонометрической функции, 2-производной и ее применению, 3-первообразной и интегралу. 4 глава начинает с обобщения понятия степени.

Изучение показательной функции начинает с построения двух графиков функций, таких же, которые рассматривает и Ш.А. Алимов. Далее вводится понятие показательной функции и основные свойства степенной функции, заметим, что у А.Н. Колмагорова на одно свойство больше представлено чем у предыдущих авторов:

1. Область определения показательной функции – множество R всех действительных чисел;

2. Область значений-множество R_+ всех положительных действительных чисел;

3. При a>1 функция возрастает на всей числовой прямой; при 0<a<1 функция убывает на множество R.

4. При любых действительных значениях x и y справедливы равенства: $a^x a^y = a^{x+y}$; $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; $(ab)^x a^x b^x$; $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{a^y}$; $(a^x)^y = a^{xy}$. [11].

Далее вводится методика решения показательных уравнений и неравенств.

Изучение логарифмической функции так же как и у предыдущих авторов начинается с введения понятия логарифма, затем рассматриваются основные его свойства. Потом вводится сразу же понятие логарифмической функции и основные ее свойства:

1. Область определения логарифмической функции – множество всех положительных чисел R_+, т.е $D(\log_a) = R_+$.

2. Область значений логарифмической функции – множество всех действительных числе.

3. Логарифмическая функция на всей области определения возрастает (при $a>1$) или убывает (при $0<a<1$) [11].

Далее А.Н. Колмагоров показывает график логарифмической функции. Далее рассматривается методика решения логарифмических уравнений и неравенств, вводится понятие обратной функции.

Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов и др. Алгебра и математический анализ 11.

В отличии от предыдущих авторов, данная тема изучается в курсе 11 класса. Учебник разбит на 6 глав, показательная и логарифмическая функции изучаются во 2 главе. Первая глава посвящена интегралам и дифференциальным уравнениям.

Вторая глава начинает с изучения процессов ограниченного роста и убывания. Заметим, что ни один из выше рассмотренных авторов не использовал данную тему в обучении. Далее как и предыдущие авторы рассматривается обобщенное понятие степени, но в отличии от предыдущих авторов, Н.Я. Виленкин сначала рассматривает логарифмическую функцию, а затем показательную.

Сначала Н.Я. Виленкин знакомит обучающихся с понятием натурального логарифма его свойства и графиком. Далее авторы вводят понятие логарифмической функции, ее свойства, далее изображается график логарифмической функции. Так же авторы вводят понятие десятичного логарифма [6].

Затем авторы переходят к рассмотрению показательной функции. Затем рассматриваются ее основные функции и график. Затем рассматриваются показательные и логарифмические уравнения и неравенства.

Стоит отметить, что данный учебник составлен при помощи более сложных определений, чем предыдущие, что помогает сделать вывод о том, что данное пособие можно использовать в классах с углубленным изучением математики.

2. Содержательно-методическое обеспечение обучения изучению показательной и логарифмической функций

2.1 Методика изучения свойств степеней. Введение определения показательной функции в школе, ее свойства и графика.

Ознакомление учащихся с показательной и логарифмической функциями начинается с изучения свойств степеней и логарифмов.

Курс алгебры знакомит учащихся с понятием степени с рациональным показателем. Таким образом для любого основания степени а (где $a>0$, $a\neq1$). Можно построить функцию: $x \to a^x, x \in Q$, область определения которой – множество действительных чисел, необходимо ввести определение, степени с иррациональным показателем. Используемое свойство степени с основным, например, большим единицы (возрастании), рациональное приближение иррационального числа α: $r_1 < \alpha < r_2$. Исходя из графического изображения зависимости показателя степени и значения степени, показывается, что найдется такое значение у, которое будет наибольшим среди всех a^{r1} и наименьшим среди всех $a^{r\ 2}$, которое можно считать значением a^{α} .

Затем формируется определение показательной функции: функция, заданная формулой $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq1$), называется показательной функцией с основанием а, и формулируемые основные свойства: $D(a^x)=R$; $E(a^x)=R_T$; a^x возрастает при $a>1$ и a^x убывает при $0<a<1$; напоминаются основные свойства степеней. Т.о. показательная функция есть систематизация, обобщение и расширение знаний учащихся о свойствах степени.

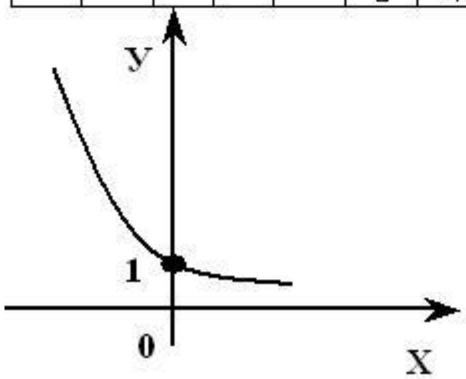
Замечание. Исключение из числа значений основания *a* чисел 0; 1 и отрицательных значений *a* объясняется следующими обстоятельствами:

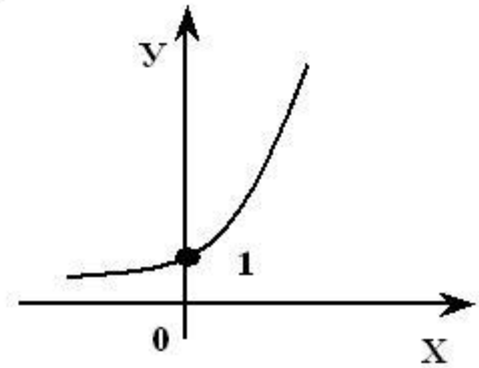
а = 0	Выражения вида 0^x определено при $x > 0$ и в этом случае

	тождественно равно нулю.
a = 1	Выражение 1^x определено при всех x, имеет постоянное значение (тождественно единице).
a < 0	Возможно возведение в целую степень или в рациональную степень с нечётным знаменателем.

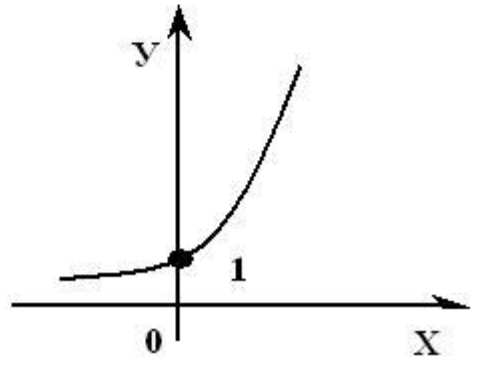
Само аналитическое выражение a^x в указанных случаях сохраняет смысл и может встречаться в решении задач. Например, для выражения x^y точка $x = 1; y = 1$ входит в область допустимых значений.

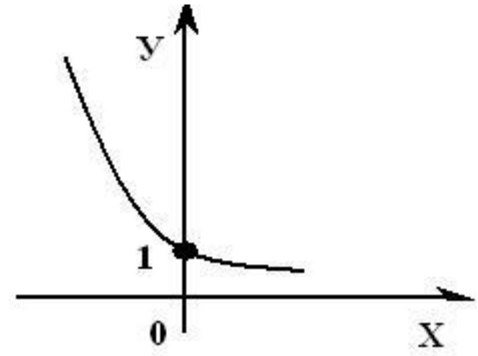
Построить графики функций: $y = (\frac{1}{2})^x$ и $y = 2^x$.

<table>
<tr><td>$y = (\frac{1}{2})^x$</td><td>$y = 2^x$</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>y</td><td>8</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{8}$</td></tr>
</table>


</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>y</td><td>$\frac{1}{8}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td></tr>
</table>


</td></tr>
<tr><td colspan="2">График показательной функции</td></tr>
<tr><td>$y = a^x$, a > 1</td><td>$y = a^x$, 0< a < 1</td></tr>
</table>





Свойства показательной функции

Свойства показательной функции	$y = a^x$, a > 1	$y = a^x$, 0< a < 1
1. Область определения функции	$(-\infty; \infty)$	
2. Область значений функции	$(0; \infty)$	
3. Промежутки сравнения с единицей	при $x > 0$, $a^x > 1$	при $x > 0$, $0 < a^x < 1$
	при $x < 0$, $0 < a^x < 1$	при $x < 0$, $a^x > 1$
4. Чётность, нечётность.	Функция не является ни чётной, ни нечётной (функция общего вида).	
5.Монотонность.	монотонно возрастает на **R**	монотонно убывает на **R**

6. Экстремумы.	Показательная функция экстремумов не имеет.
7.Асимптота	Ось O_x является горизонтальной асимптотой.
8. При любых действительных значениях *x* и *y*; $a > 0, a \neq 1;\ b > 0.\ b \neq 1$	$a^x \cdot a^y = a^{x+y};\ a^x : a^y = a^{x-y};\ (ab)^x = a^x \cdot b^x;\ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};\ (a$ $r \in Q$ и $a < b$, то $a^x < b^x$ при $r > 0$, $a^x > b^x$ при $r <$ $r, s \in Q, r > s$, то $a^r > a^s$ при $a > 1, a^r < a^s$ п

В качестве приложения свойств показательной функции рассматриваются решения простейших показательных уравнений и неравенств.

Показательными называются уравнения, в которых неизвестная переменная находится только в показателях каких-либо степеней.

Для решения *показательных уравнений* требуется знать и уметь использовать следующую несложную теорему:

Теорема 1. Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0, a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Помимо этого, полезно помнить об основных формулах и действиях со степенями:

$a > 0, b > 0;$

$a^0 = 1, 1^x = 1;$

$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}\ (k \in Z, n \in N;$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x};$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y};$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};$$

$$(a^x)^y = a^{xy};$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x;$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

Уравнение вида $h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}$ при $h(x) > 0, h(x) \neq 1$, равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} h(x) = 1, \\ f(x) \text{ и } g(x) \text{определены} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} f(x) = g(x), \\ h(x) > 0. \end{cases}$$ [23]

2.2 Решение задач с использованием показательной функции в средней школе

1. $y = (tg60°)^{1-x}$.

Здесь $a = tg60° = \sqrt{3}$. Запишем данную функцию в виде $y = (\sqrt{3})^{1-x} = \sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{-x} = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{(\sqrt{3})^x} = \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$. Здесь $a = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$.

Следовательно, функция убывающая. Изобразим график функции:

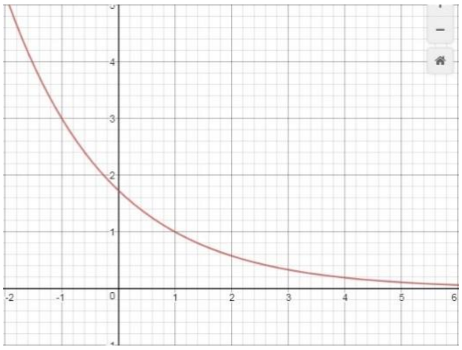


Рис. 5

Если x=0, то $y = \sqrt{3}(\frac{1}{\sqrt{3}})^0 = \sqrt{3}$.

2. Изобразить схематически график функции $y = 3^{|x-1|}$.

Пусть x-1≥0, тогда $y = 3^{|x-1|} = 3^{x-1} = 3^x \cdot 3^{-1} = \frac{1}{3} \cdot 3^x$. Изобразим график функции:

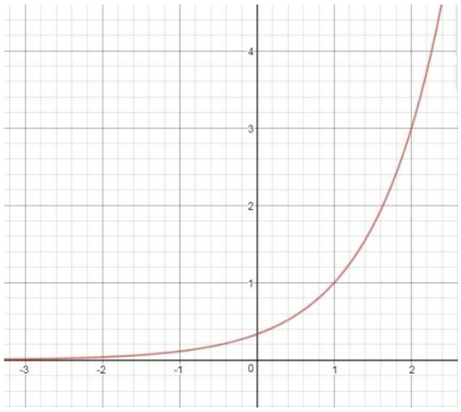


Рис. 6

Пусть x-1≤0. Тогда $y = 3^{|x-1|} = 3^{-(x-1)} = 3^{-x+1} = 3 \cdot \frac{1}{3^x} = 3 \cdot (\frac{1}{3})^x$. Здесь $a = \frac{1}{3} < 1$. Изобразим график функции:

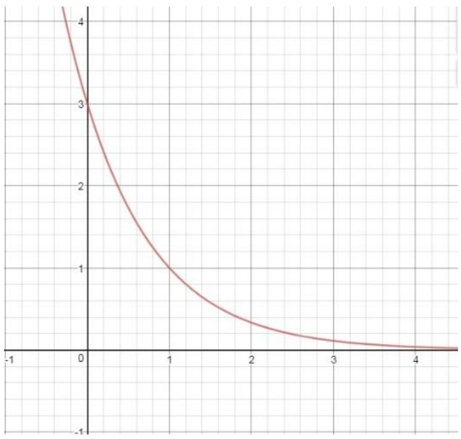


Рис. 7 [14].

Уравнения вида $\alpha \cdot a^x + \beta \cdot b^x = 0$

3. Решите уравнение: $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$

Разделив обе части уравнения на $36^x \neq 0$, получим:

$3 \cdot \left(\frac{16}{36}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{81}{36}\right)^x = 5, 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x = 5$ Предположим $(\frac{4}{9})^x = y$, тогда имеем: $3y + \frac{2}{y} = 5, 3y^2 - 5y + 2 = 0$. Решив данное квадратное уравнение получим корни $y_1 = 1, y_2 = \frac{2}{3}$. Следовательно, $(\frac{4}{9})^x = 1, x_1 = 0$; $(\frac{4}{9})^x = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{2}$. [14].

4. Решите уравнение: $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

Преобразуем уравнение к виду $7 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 5^{x+1} = 7 \cdot 3^{x+1} - 25 \cdot 5^{x+1}$. Поделив обе части уравнения на $3^{x+} \neq 0$ и обозначив $y = (\frac{5}{3})^{x+1}$ получим: $7 - 5y = 27 - 25y$ т.е y = 1. Отсюда $(\frac{5}{3})^{x+1} = 1$ или $(\frac{5}{3})^{x+1} = (\frac{5}{3})^0$. В силу монотонности функции $(\frac{5}{3})^{x+1}$ последнее уравнение равносильно уравнению x+1=0, откуда x = - 1 [16].

5. Решите уравнение: $(0{,}4)^{\text{x}-1} = (6{,}25)^{6\text{x}-5}$

Поскольку $0{,}4^{\text{x}-1} = (\frac{2}{5})^{\text{x}-1}, (6{,}25)^{6\text{x}-5} = (\frac{25}{4})^{6\text{x}-5} = (\frac{5}{2})^{12\text{x}-10} = (\frac{2}{5})^{10-12\text{x}}$, тогда $(\frac{2}{5})^{\text{x}-1} = (\frac{2}{5})^{10-12\text{x}} \leftrightarrow \text{x} - 1 = 10 - 12\text{x} \leftrightarrow \text{x} = \frac{11}{13}$.

[5].

Уравнения вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

6. Решите уравнение и в ответе укажите больший корень: $8^{\frac{2x-2}{x}} = \sqrt{4^{x-1}}$

Перейдем в обеих частях уравнения к одному основанию 2: $(2^3)^{\frac{2x-2}{x}} = (2^{2(x-1)})^{\frac{1}{2}}$ или $2^{\frac{6(x-1)}{x}} = 2^{x-1}$. Полученное уравнение равносильно уравнению $\frac{6(x-1)}{x} = x-1$, которое распадается на два уравнения: $\begin{matrix} x-1=0 \\ x_1 = 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} \frac{6}{x}=1 \\ x_2=6 \end{matrix} \right.$. Больший корень x=6 [16].

7. Решите уравнение: $((\sqrt[5]{27})^{\frac{x}{4}-\frac{\sqrt{x}}{3}})^{\frac{x}{4}+\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt[4]{3^7}$

Поскольку $\sqrt[5]{27} = (3^3)^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{3}{5}}$, а $\left(\frac{x}{4} - \frac{\sqrt{x}}{3}\right) \cdot \left(\frac{x}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{x^2}{16} - \frac{x}{9}$, то исходное уравнение равносильно следующему $3^{\frac{3}{5}(\frac{x^2}{16}-\frac{x}{9})} = 3^{\frac{7}{4}}$, т. е $\frac{3(9x^2-16x)}{5\cdot16\cdot9} = \frac{7}{4}$. Отсюда $9x^2 - 16x - 420 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{70}{9}, x_2 = -6$.

На ОДЗ x≥0, поэтому значение x_2 не подходит и окончательный ответ $x = \frac{70}{9}$ [16].

8. Решите уравнение: $\sqrt{5-\mathrm{x}}\left(3^{\mathrm{x}^2-7{,}2\mathrm{x}+3{,}9} - 9\sqrt{3}\right) = 0$

Область допустимых значений уравнения $5 - \mathrm{x} \geq 0$, т. е $\mathrm{x} \leq 5$. При таких значениях x уравнение равносильно совокупности уравнений $\sqrt{5-\mathrm{x}} = 0, 3^{\mathrm{x}^2-7{,}2\mathrm{x}+3{,}9} = 9\sqrt{3}$. Из первого уравнения находим x_1=5. Для решения второго уравнения преобразуем его правую часть:

$9\sqrt{3} = 3^2 3^{\frac{1}{2}} = 3^{2,5}$. Таким образом, второе уравнение совокупности равносильно уравнению $x^2 - 7{,}2x + 3{,}9 = 2{,}5$, т.е $x^2 - 7{,}2x + 1{,}4 = 0$. Отсюда находим $x_2 = \frac{1}{5}, x_3 = 7$. Области допустимых значений уравнения принадлежит только число $\frac{1}{5}$. Следовательно, решениями уравнения являются числа 5 и $\frac{1}{5}$ [8].

9. Решите уравнение: $|x-2|^{x^2-2x} = |x-2|^{5x-10}$

Корнями уравнения являются решения смешанной системы: $\begin{cases} |x-2| > 0, \\ |x-2| \neq 1, \\ x^2 - 2x = 5x - 10, \end{cases}$ т.е $\begin{cases} x \neq 2, \\ x \neq 3, x \neq 1, \\ x^2 - 7x + 10 = \end{cases}$ и быть может решения уравнения $|x-2| = 1$. Из двух корней уравнения $x^2 - 7x + 10 = 0$ решением системы является одно число x=5, а требованию $|x-2| = 1$ удовлетворяют x=3 и x=1, так же являющиеся решением системы, поскольку при этих значениях x функции $x^2 - 2x$ и $5x - 10$ определены. Итак получаем ответы: x=1, x=3, x=5 [10].

Уравнения вида $\boldsymbol{\alpha \cdot a^{x+b} + \beta \cdot a^{x+c} + \gamma \cdot a^{x+d} = \delta}$

10. Решите уравнение: $2 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x-1} - 3^x = 9$

Преобразовав уравнение к виду $2 \cdot 3 \cdot 3^x - 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^x - 3^x = 9$ или $3^x(6 - 2 - 1) = 9, 3^x \cdot 3 = 9,$ получим равносильное уравнение $3^x = 3$, откуда x=1 [16].

11. $3^x + \frac{240}{3^x} = \frac{9^{x+2}}{3^x}$

Умножим обе части уравнения на $3^x \neq 0$, получим уравнение $9^x + 240 = 81 \cdot 9^x$ или $9^x = 3 \to x = 0{,}5$. [16]

12. Решите уравнение: $3 \cdot 16^x + 37 \cdot 36^x = 26 \cdot 81^x$

В этом уравнении числа 16, 36 и 81 образуют три последовательных члена геометрической прогрессии (со знаменателем $\frac{9}{4}$). Для решения исходного уравнения разделим обе его части на 81^x. Получаем $3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x} + 37 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{x} - 26 = 0$. Пусть $t = (\frac{4}{9})^x$, тогда уравнение принимает вид $3t^2 + 37t - 26 = 0$, откуда $t_1 = \frac{2}{3}, t_2 = -13$. Сделаем замену: $(\frac{4}{9})^x = \frac{2}{3}, \left(\frac{4}{9}\right)^x = -13$. Второе уравнение не имеет решений. Из уравнения $(\frac{4}{9})^x = \frac{2}{3} \leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3}$ находим единственный корень исходного уравнения $x_1 = \frac{2}{3}$.

13. Решите уравнение $9^x - 3^{x+2} + 14 = 0$ и определите, какие из корней подходят отрезку $[1; \sqrt{5}]$.

Пусть
$t = 3^x$, тогда исходное уравнение пимет вид $t^2 - 9t + 14 = 0$. Откуда $t = 2$ или $t = 7$.

Следовательно $9^x - 9 \cdot 3^x + 14 = 0 \leftrightarrow \left[\begin{matrix} 3^x = 2, \\ 3^x = 7 \end{matrix}\right. \leftrightarrow \left[\begin{matrix} x = \log_3 2 \\ x = \log_3 7 \end{matrix}\right.$. Поскольку $\log_3 2 < \log_3 3 < 1,$ корень $\log_3 2$ не принадлежит отрезку $[1; \sqrt{5}]$. Поскольку $1 = \log_3 3 < \log_3 7 < \log_3 9 = 2 < \sqrt{5},$ корень $\log_3 7$ принадлежит отрезку $[1; \sqrt{5}]$. [20]

Уравнения вида $\boldsymbol{\alpha} \cdot a^{2x} + \boldsymbol{\beta} \cdot a^x + \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$

14. Решите уравнение: $2^{2x+1} + 2^{x+2} - 16 = 0$.

Преобразовав уравнение к виду $2 \cdot 2^{2x} + 4 \cdot 2^x - 16 = 0$, обоначим $y = 2^x$. Тогда, поскольку $2^{2x} = (2^x)^2 = y^2$, получим квадратное уравнение относительно y: $2y^2 + 4y - 16 = 0$ или $y^2 + 2y - 8 = 0$. Отсюда $y_1 = -4$, $y_2 = 2$. Так как y>0, то подходит лишь корень y=2. Таким образом $2^x = 2^1$ и значит, x=1 [16].

15. Решите уравнение: $5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 15 = 0$

Пусть $t = 5^x,$ тогда $t^2 - 2t - 15 = 0,$ отсюда находим $t_1 = 5, t_2 = -3$. Таким образом, данное уравнение равносильно совокупности уравнений $5^x = 5, 5^x = -3$. Второе уравнение этой совокупности корней не имеет, так как -3<0, а $5^x > 0$ при любом x, а из первого уравнения находим, что x=1 единственный корень исходного уравнения [15].

16. Решите уравнение: $4^{\sqrt{x}} - 9 \cdot 2^{\sqrt{x}-1} + 2 = 0$

Так как $4^{\sqrt{x}} = 2^{2\sqrt{x}}$ и $2^{\sqrt{x}-1} = 2^{\sqrt{x}} \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{\sqrt{x}}$, то данное уравнение примет вид $2^{2\sqrt{x}} - \frac{9}{2} 2^{\sqrt{x}} + 2 = 0$. Произведем замену переменной $2^{\sqrt{x}} = y$, где y>0 в силу свойства показательной функции. Тогда получи уравнение $y^2 - \frac{9}{2} y + 2 = 0$, корни которого $y_1 = 4, y_2 = 0{,}5$ положительны. Из уравнения $2^{\sqrt{x}} = 4$ следует что $2^{\sqrt{x}} = 2^2, \sqrt{x} = 2,$ откуда x=4. Из уравнения

$2^{\sqrt{x}} = 0{,}5$, следует что $2^{\sqrt{x}} = 2^{-1}$, а это невозможно. Итак получаем ответ x=4 [10].

17. Решите уравнение: $10^{\frac{2}{x}} + 25^{\frac{1}{x}} = 4{,}25 \cdot 50^{\frac{1}{x}}$

Предварительно выполним преобразование $10^{\frac{2}{x}} = (2 \cdot 5)^{\frac{2}{x}} = 2^{\frac{2}{x}} \cdot 5^{\frac{2}{x}};\ 25^{\frac{1}{x}} = (5^2)^{\frac{1}{x}} = 5^{\frac{2}{x}};\ 50^{\frac{1}{x}} = (2 \cdot 5^2)^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{x}} \cdot 5^{\frac{2}{x}}$. разделив обе части уравнения на $5^{\frac{2}{x}} \neq 0$, прлучим уравнение $2^{\frac{2}{x}} + 1 = 4{,}25 \cdot 2^{\frac{1}{x}}$, которе решаем подстановкой $y = 2^{\frac{1}{x}}$. Ответ $x_{1,2} = \pm 0{,}5$. [10].

Уравнения вида $\boldsymbol{\alpha \cdot a^{x+b} + \beta \cdot a^{-x+c} = \gamma}$

18. Решите уравнение и укажите меньший корень: $3^x + 3^{3-x} - 12 = 0$

Преобразуем уравнение к виду $3^x + \frac{27}{3^x} - 12 = 0$. Обозначим $y = 3^x$, получим уравнение вида $y + \frac{27}{y} - 12 = 0$ или $y^2 - 12y + 27 = 0$. Решив квадратное уравнение получим корни $y_1 = 3, y_2 = 9$. Сделаем замену $3^x = 3 \to x = 1;\ 3^x = 9 \to x = 2$. Ответ x=1 [16].

19. Решите уравнение: $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$

Преобразуем уравнение к виду $10 \cdot 10^{x^2} - 10 \cdot 10^{-x^2} = 99$. Произведем замену $y = 10^{x^2}$, получим уравнение вида $10y - 10 \cdot \frac{1}{y} = 99$ или $10y^2 - 9y - 10 = 0$. Решив квадратное уравнение получим корни: $y_1 = -0{,}1, y_2 = 10$. Т.к $y \geq 0$ следовтельно $y_1 = -0{,}1$ не подходит. Произведем замену переменных: $10^{x^2} = 10 \to x = \pm 1$. [10].

Подведем некоторые итоги. Можно выделить три основных метода решения примеров и задач:

1) Функционально-графический метод. Он основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функций.

2) Метод уравнивания показателей. Он основан на теореме о том, что уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$, где a - положительное число, отличное от 1.

3) Метод введения новой переменной.

2.3 Методика изучения логарифмической функции, ее свойств и графика. Производная логарифмической функции

Изучение логарифмической функции начинается с выделения определения: функцию, заданную формулой $y = \log_a b$ называют логарифмической функцией с основанием a. Основные свойства выводится из свойств показательной функции:

1. $D(\log_a x) = R_+$ т.к. при решении уравнения $a^k = b_k \to x = \log_a b$, т.е. любое положительное число b имеет логарифм по основанию a.

2. $E(\log_a x) = R$, т.к. по определению логарифма любого действительного числа y справедливо равенство: $\log_a(a^y) = y \log_a a = y$, т.е. функции вида $y = \log_a x$ принимает значение y_0 в точке $x_0 = a^{y_0}$.

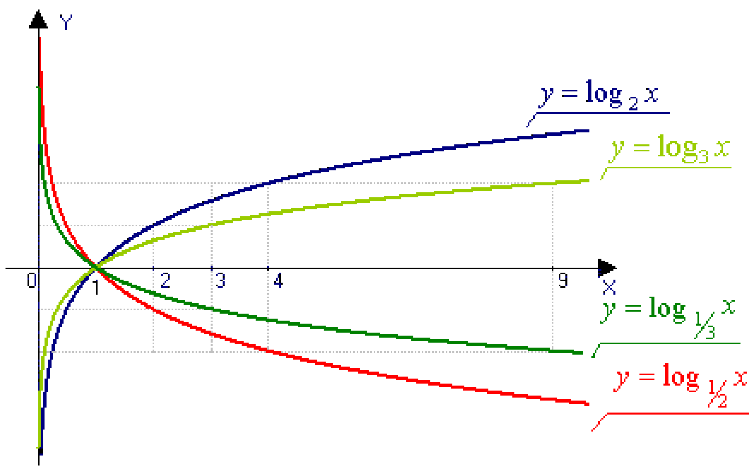


Рис. 8

Свойства функции

- Область определения (0;∞)

- Область значений R
- Четность, нечетность: функция не является ни четной, ни нечетной
- Нули: $y = 0$ при $x = 1$
- Промежутки знакопостоянства: если $0 < a < 1$, то $y > 0$ при $x \in (0; 1)$ $y<0$ при $x \in (1;\infty)$ если $a > 1$, то $y > 0$ при $x \in (1; \infty)$, $y < 0$ при $x \in (0; 1)$
- Промежутки монотонности: при $0 < a < 1$ функция убывает при $x \in (0; \infty)$ при $a > 1$ функция возрастает при $x \in (0; \infty)$
- Экстремумов нет
- График функции проходит через точку: (1; 0)
- Асимптота $x = 0$ [7].

3. Логарифмическая функция на всей области определения возрастает (при a>1) или убывает (при 0<a<1).

Покажем, что $y = \log_a x$ при a>1 возрастает. Пусть $x_1, x_2 \in D(\log_a x)$ и $x_2 > x_1$, надо доказать, что: $\log_a x_2 > \log_a x_1$. Допустим противное, т.е. что $\log_a x_2 \le \log_a x_1$. Т.к. показательная функция $y = a^x$ при a>1 возрастает, то из неравенства $\log_a x_2 \le \log_a x_1$ следует: $a^{\log_a x_2} \le a^{\log_a x_1} \to x_2 \le x_1$.
Следовательно: $\log_a x_2 > \log_a x_1$ и функция $y = \log_a x$ при a>1 – возрастает.

Т.к. при a>1 функция возрастает, то логарифмическая функция положительна при x>1 и отрицательна для 0<x<1 (для основания 0<a<1 – наоборот). На основании рассмотренных свойств строится график этой функции.

Рассмотрим несколько задач.

Решить уравнение log5 (3x– 2) = log5 7.

Решение. Используя доказанную теорему, получаем 3x– 2 = 7, откуда 3x = 9, x = 3.

Ответ. x = 3.

Решить неравенство log2 x < 3.

Решение. Пользуясь тем, что 3 = log2 23 = log2 8, запишем данное неравенство так: log2 x < log2 8. Так как функция y = log2 x определена при x > 0 и возрастает, то неравенство log2 x < log2 8 выполняется при x > 0 и x < 8.

Ответ. 0 < x < 8.

Решить неравенство log1/3 x ≤ – 2.

Решение. Запишем данное неравенство таким образом: log1/3 x ≤ log1/3 9. Функция y = log1/3 x определена при x ≥ 0 и убывает, поэтому неравенство выполняется при x > 0 и x ≥ 9.

Ответ. x ≥ 9.

Производная показательной и логарифмической функции

Приступая к изучению производной показательной и логарифмической функций, учащиеся знакомятся с новым для них числом e. Необходимость появления этого числа связывается с решением задачи о касательной к графику показательной функции, с угловым коэффициентом, равным 1, т.е. без доказательства принимается следующее утверждение:

существует такое число, больше 2 и меньшее 3 (это число обозначают буквой e), что показательная функция $y=e^x$ в точке 0 имеет производную, равную 1, т.е. $(e^{\Delta x} -1)/ \Delta x$ - при Δx-0.

Теорема: функция $e^{ж}$ дифференцируема в каждой точке области определения и $(e^x)'= e^x$. Опр.: Натуральным логарифмом называется логарифмом по основанию e:

$\ln x = \log_e x$

Верно соотношение:

$e^{\ln a} =a \Rightarrow a^x =(e^{\ln a})^x =e^{x \ln a}$.

Теорема: показательная функция a^x дифференцируема в каждой точке области определения, и:

$(a^x)'=a^x \ln a$

Дифференцируемость логарифмической функции следует из того, что: графики $y=a^x$ и $y=\log_a x$ симметричны относительно y=x. Показательная функция дифференцируема в любой точке, а ее производная не обращается в нуль, график показательной функции имеет негоризонтальную касательную в каждой точке. Поэтому и график логарифмической функции имеет невертикальную касательную в любой точке, а это равносильно дифференцируемости логарифмической функции на ее области определения.

Производная логарифмической функции для любого x из области определения находится по формуле: ln'x=1/x.

$x=e^{\ln x}$ => $x'=(e^{\ln x})'$, n/r/ x'=1 => $(e^{\ln x})'=1$ => $e^{\ln x}(\ln x)'=1$ => $\ln' x=1/e^{\ln x}=1/x$.

Так как показательная функция $y=a^x$ где $(a>0, a\neq 1)$ являеся монотонной (возрастающей при $a>1$ и убывающей при $0<a<1$), то она имеет обратную функцию. Чтобы найти эту обратную функцию, нужно из формулы $y=a^x$ выразить x через y: $x=\log_a y$, а затем поменять обозначения x на y и y на x; тогда получим $y=\log_a x$. функция $y=\log_a x$ (где $a>0, a\neq 1$) называется логарифмической.

Итак, показательная и логарифмическая функции при одном и том же основании являются взаимно обратными функциями.

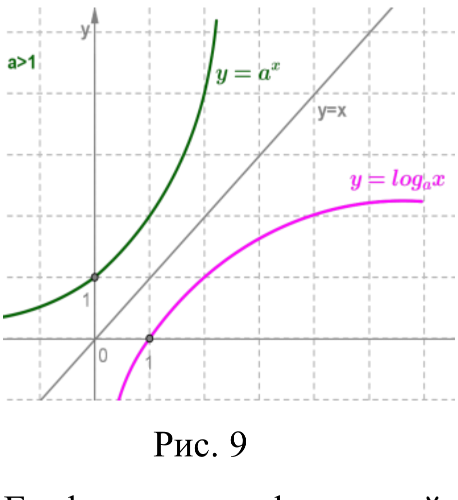


Рис. 9

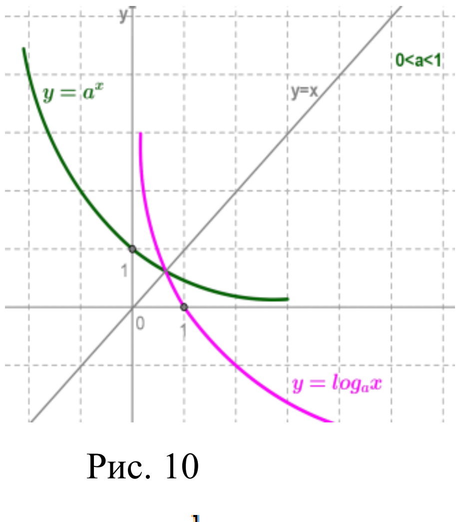


Рис. 10

График логарифмической функции $y=\log_a x$ можно построить воспользовавшись тем, что функция $y=\log_a x$ обратна показательной функции $y = a^x$. Поэтому достаточно построить график функции $y = a^x$, а затем отобразить его симметрично относительно прямой y=x. на рисунке 11 изображен график функции $y = \log_a x$ при $a > 1$, а на рисунке 12 – график функции $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$.

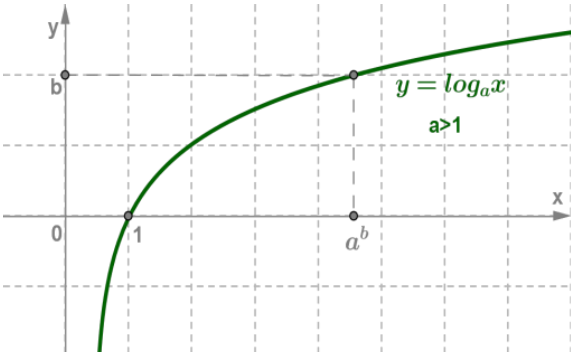


Рис. 11

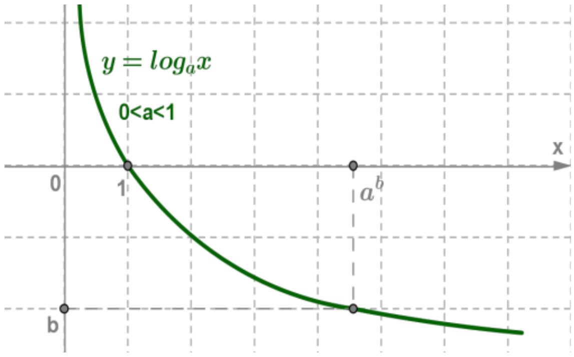


Рис. 12

Свойства функции $y = log_a x$ *при* $a > 1$:

1. $D(f) = R_+$;
2. $E(f) = R$;
3. функция возростает;
4. если $x = 1$, то $\log_a x = 0$;
5. если $0 < x < 1$, то $\log_a x < 0$;
6. есл $x > 1$, то $\log_a x > 0$.

Свойства функции $y = log_a x$ *при* $0 < a < 1$:

1. $D(f) = R_+$;
2. $E(f) = R$;
3. функция убывает;
4. *если x=1, то* $y = log_a x = 0$;
5. если $0 < x < 1$, то $y = log_a x > 0$;
6. если $x > 1$, то $y = log_a x < 0$.

При любых a>0, a≠1 и b>0, b≠1 справедливы следующие равенства:

- $x > 0 \rightarrow a^{\log_a x} = x$ (основное логарифмическое тождество)

- $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1.$
- $x > 0, y > 0 \to \log_a xy = \log_a x + \log_a y$ (формула для логарифма произведения).
- $x > 0, y > 0 \to \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ (формула для логарифма частного).
- $x > 0 \to \log_{a^\beta} x^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a x$ для любых α и β.

В частности, $x > 0 \to \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$ для любого α (формула для логарифма степени); $x > 0 \to \log_{a^\beta} x = \frac{1}{\beta} \log_a x$ для любого β; $x > 0 \to \log_{a^\alpha} x^\alpha = \log_a x$ для любого α; $x > 0 \to \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$. $x > 0 \to \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ (формула перехода к новому основанию).

В частности, $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$. $c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$ для любых $a, b, c > 0, a \neq 1.$

2.3 Решение задач с использованием логарифмической функции в средней школе.

1. Найдите область определения функции $y = \log \frac{x^2+4x}{x^2-3x-4}$.

Решая методом интервалов неравенство $\frac{x^2+4x}{x^2-3x-4} > 0, \frac{x(x+4)}{(x+1)(x-4)} > 0,$ находим (рис), что $D(f) = (-\infty; -4) \cup (-1; 0) \cup (0; 4)$. [14]

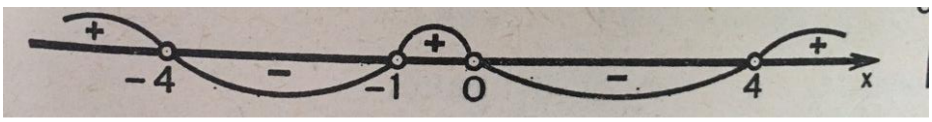


Рис. 13

2. Постоить график функции $y = \log_2 3x$.

Так как област определения данной функции – множество положительных чисел, поэтому должно выполняться неравентво 3x>0. Таким образом, областью определеня функции служит промежуток (0;∞). Кривая пересекает ось Ох в точке $(-\frac{1}{3};0)$, так как при y=0 получаем $2^0 = 3x, \text{т. е } x = \frac{1}{3}$. Изобразим график функции

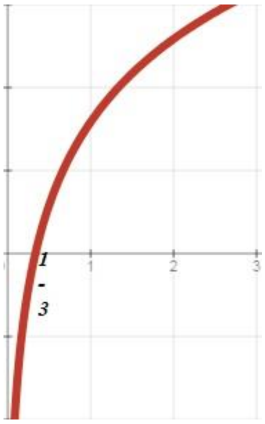


Рис. 14 [14]

3. Построить график функции $y = \log_3(4-5x)$

Должно выполняться неравенство 4-5x>0, т.е $x < \frac{4}{5} = 0{,}8$. Следовательно, областью определения данной функции является промежуток (-∞;0,8). Найдем точки пересечения графика с осями координат. Полагая, что y=0, получим $3^0 = 4-5x, \text{откуа } x = 0{,}6$. При $x = 0$ имеем $y = \log_3 4$. Изобразим график функции:

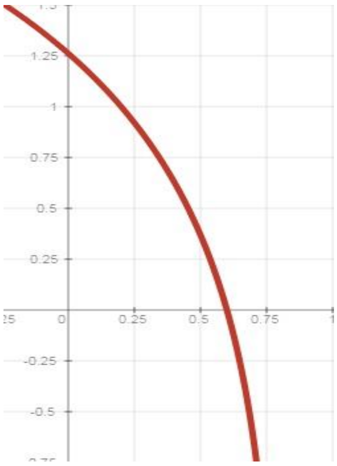


Рис. 15 [14]

4. Построить график функции $y = \log_2(x^2-3x-4)$

Должно выполняться неравенство $x^2-3x-4 > 0$, т.е (x+1)(x-4)>0. Следовательно, областью определения функции является $(-\infty;1) \cup (4;\infty)$.

Найдем точки пересечения грфика с осью Ох. Полагая, что y=0, получим $2^0 = x^2 - 3x - 4$, откуда $x_1 = \frac{3-\sqrt{29}}{2}$, $x_2 = \frac{3+\sqrt{29}}{2}$. Изобразим график функции

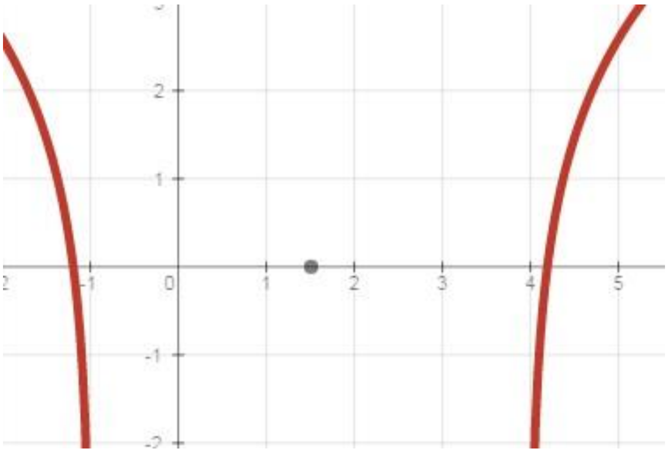


Рис. 16 [14]

Уравнения сводящиеся к квадратным

5. Решите уравнение: $(\lg x)^2 - 3lgx + 2 = 0.$

Обозначив, y=lgx, получим квадратное уравнение $y^2 - 3y + 2 = 0$, откуда $\left.\begin{array}{c} y_1 = 1 \\ lgx = 1 \\ x = 10 \end{array}\right| \begin{array}{c} y_2=2 \\ lgx=2 \\ x=100 \end{array}$. Больший корень x=100 [16].

6. Решите уравнение: $\left(\log_{0,5} 4x\right)^2 + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8$

На ОДЗ (x>0) исходное уравнение равносильно следующему: $(\log_2 4 + \log_2 x)^2 + 2\log_2 x - 3 = 8$, откуда, обозначая $y = \log_2 x$, найдем $y_1 = -7, y_2 = 1$. Произведем обратную замену: $\log_2 x = -7 \to x_1 = \frac{1}{128}$, $\log_2 x = 1 \to x_2 = 2$. [16]

7. Решите уравнение $(\log_x 10)^3 - (\log_x 10)^2 - 6\log_x 10 = 0$

Обозначим $t = \log_x 10$ и произведем замену неизвестного в уравнении. Тогда

$$t^3 - t^2 - 6t = 0 \leftrightarrow t(t^2 - t - 6) = 0 \leftrightarrow t(t-3)(t+2) = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = 3, \\ t = -2. \end{array}\right.$$

Таким образом $\left[\begin{array}{l}\log_x 10 = 0,\\ \log_x 10 = -2,\\ \log_x 10 = 3\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 10^{\frac{1}{3}}\\ x = 10^{-\frac{1}{2}}\end{array}\right.$. Итак, множество всех решений уравнения состоит из чисел $\frac{\sqrt{10}}{10}, \sqrt[3]{10}$. [7].

Уравнения на применение формулы $\log_a b = (\log_b a)^{-1}$

8. Решите уравнение: $\log_5 x - \log_x 5 = \frac{3}{2}$

На ОДЗ (x>0, x≠1) исходное уравнение равносильно уравнению $\log_5 x - \frac{1}{\log_5 x} = \frac{3}{2}$ или $2(\log_5 x)^2 - 3\log_5 x - 2 = 0$. Отсюда $\log_5 x = -\frac{1}{2}$ и $\log_5 x = 2$ т.е соответственно $x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, x_2 = 25$. [16]

9. Решите уравнение: $\log_7 x = 5 - \log_{\sqrt[3]{x}} 49$. Найдите корень или сумму корней.

Учитывая ОДЗ уравнения и формулы $\log_{\sqrt[3]{x}} 49 = 6\log_x 7, \log_x 7 = \frac{1}{\log_7 x}$, приведем уравнение к виду $(\log_7 x)^2 - 5\log_7 x + 6 = 0$. Произведем замену $y = \log_7 x \ \rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0$. Получаем $y_1 = 3, y_2 = 2$. Произведем обратную замену $\log_7 x = 3 \rightarrow x_1 = 7^3 = 343, \log_7 x = 2 \rightarrow x_2 = 7^2 = 49$. Отсюда сумма корней равна 392 [16].

Уравнения на формулы для логарифмов произведения, частного и степени.

10. Решите уравнение: $\log_3 x - \log_3(x+8) = -\log_3(x+3)$

На ОДЗ определяемой системой неравенств $\begin{cases} x > 0,\\ x+8 > 0, \text{т.е } x > 0,\\ x+3 > 0\end{cases}$ исходное уравнение равносильно уравнению $\log_3 \frac{x}{x+8} = \log_3 \frac{1}{x+3}$, откуда $\frac{x}{x+8} = \frac{1}{x+3}$ или $x^2 + 2x - 8 = 0$. Отсюда имеем $x_1 = 2$ – входит в ОДЗ, $x_2 = -4$ – не входит в ОДЗ. [16]

11. Решите уравнение: $2\lg\left(x+\frac{1}{2}\right) - \lg(x-1) = \lg\left(x+\frac{5}{2}\right) - lg2$.

Заменим исходное уравнение равносильным ему на ОДЗ (x>0) уравнением $\lg(x+\frac{1}{2})^2 = \lg[(x-1)(2x+5)]$ или $4x^2 + 8x - 21 = 0$. Решив квадратное уравнение найдем корни $x_1 - -3{,}5$ (не подходит ОДЗ), $x_2 = 1{,}5$. [16]

12. Решите уравнение $\log_4(x^2-4x+2) - \log_4(x^2-6x+5) = -\frac{1}{2}$

Преобразуем уравнение к виду $\log_4(x^2-4x+2) - \log_4(x^2-6x+5) = \log_4\frac{1}{2}$. Отсюда следует уравнение $\log_4\frac{x^2-4x+2}{x^2-6x+5} = \log_4\frac{1}{2}$, откуда имеем $\frac{x^2-4x+2}{x^2-6x+5} = \frac{1}{2}$ или $2(x^2-4x+2) = x^2-6x+5$. Таким образом, $x^2-2x-1=0$. т. е $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. При проверке значений $x_1 = 1+\sqrt{2}$ отбрасываем. Окончательно $x = 1-\sqrt{2}$. [16]

13. Решите уравнение $\log_5\left(\frac{x-9}{x-5}\right) + \log_5(x^2-17x+60) = 1 + \log_5 2$

На ОДЗ определяемой системой неравенств $\begin{cases} \frac{x-9}{x-5} > 0, \\ x^2-17x+60 > 0 \end{cases}$ т. е $\begin{cases} (x-9)(x-5) > 0, \\ (x-12)(x-5) > 0. \end{cases}$ Исходное уравнение равносильно уравнению $\log_5\frac{(x-9)(x-12)(x-5)}{x-5} = \log_5 10$ или (x-9)(x-12)=10. Откуда x=14 [16].

14. Решить уравнение $\log_4(x+3) + \log_4(x-1) = 2 - \log_4 8$

ОДЗ уравнения определяется системой $\begin{cases} x+3 > 0, \\ x-1 > 0, \end{cases}$ решение которой промежуток $1 < x < +\infty$. Применяя формулу для логарифма произведения получим уравнение $\log_4(x+3)(x-1) = \log_4 2 \leftrightarrow (x+3)(x-1) = 2 \leftrightarrow x^2+2x-5 = 0 \leftrightarrow$ $\left(x-(\sqrt{6}-1)\right)\left(x-(-\sqrt{6}-1)\right) = 0,$

откуда находим два корня $x_1 = -1-\sqrt{6}$ и $x_2 = \sqrt{6}-1$. Корень x_1 не удовлетворяет ОДЗ, следовательно ответ $x_2 = \sqrt{6}-1$.. [14].

Смешанные уравнения

15. Решите уравнение $\log_2(6-4^x)=x$

Исходное уравнение равносильно уравнению $6-4^x=2^x$ или $(2^x)^2+2^x-6=0$. Обозначив $y=2^x$, получим квадратное уравнение относительно у: $y^2+y-6=0$, откуда

$$\left.\begin{matrix} y_1=-3 \\ 2^x=-3 \\ \text{нет решений, т.к } 2^x>0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} y_2=2 \\ 2^x=2. \\ x=1. \end{matrix}$$ [16]

16. Решите уравнение $lg2+\lg\left(4^{-x^2}+9\right)=1+\lg(2^{-x^2}+1)$

Заменим исходное уравнение равносильным уравнением $lg2\left(4^{-x^2}+9\right)=lg10\left(2^{-x^2}+1\right)$ или $4^{-x^2}+9=5\cdot2^{-x^2}+5$, далее сделаем замену $y=2^{-x^2}$. Получим квадратное уравнение $y^2-5y+4=0\to y_1=4, y_2=1$. Выполним обратную замену:

$4=2^{-x^2}\to2=-x^2\to x^2=-2\to$ нет решений.

$1=2^{-x^2}\to0=-x^2\to x=0.$ [16]

17. Решите уравнение $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}\log_3(x^2-1)}=\sqrt{2(x-1)}$

При ОДЗ x>1 исходное уравнение равносильно уравнению $\frac{1}{x+1}\cdot(x^2-1)=\sqrt{2(x-1)}$ т.е $x-1=\sqrt{2(x-1)}$. Решив данное уравнение получим x=3.

18. Решить уравнение $x^{\frac{lgx+5}{3}}=10^{lgx+1}$

Так как логарифмическая функция определена при x>0, то лева и права части данного уравнения положительны. Логарифмируя их по основанию 10 получаем $\frac{lgx+5}{3}lgx=lgx+1$. Произведем замену переменной $y=lgx$ и решим уравнение $y^2+5y=3y+3$. Имеем $y^2+2y-3=0$, откуда $y_1=-3, y_2=1$. Из уравнения $lgx=3\to x=10^{-3}, lgx=1\to x=10$. Итак $x_1=0{,}001, x_2=10$. [10].

Уравнения на применение формулы перехода к другому основанию

19. Решите уравнение $\log_2 x + \log_5 x = \log_5 10$

Перейдем в левой части уравнения к основанию 2: $\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 5} = \log_5 10$. Отсюда $\log_2 x = \frac{\log_5 10}{1+\frac{1}{\log_2 5}}$ т.е $\log_2 x = \frac{\log_5 10}{1+\log_5 2}$, $\log_2 x = 1$. Таким образом, x=2.

20. Решите уравнение $\log_{3x} 3 = (\log_x 3)^2$

Перейдем к основанию 3, получим равносильное уравнение $\frac{1}{\log_3 3x} = \frac{1}{(\log_3 x)^2}$, откуда (при x>0, 3x≠1, x≠1) следует уравнение $(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 1 = 0$, получили квадратное уравнение относительно $\log_3 x$. решив его получим $\log_3 x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\log_3 x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Отсюда следует что $x_1 = 3^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$; $x_2 = 3^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$.

21. Решите уравнение: $2\log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = 9$

ОДЗ уравнения промежуток x>0. Поскольку $\log_{\sqrt{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} = 2\log_2 x$, $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\log_2 x$, то исходное уравнение равносильно уравнению $2\log_2 x + 2\log_2 x - \log_2 x = 9$, т.е уравнению $\log_2 x = 3 \leftrightarrow \log_2 x = \log_2 8 \leftrightarrow x = 8$.
[21].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение темы "Показательная, логарифмическая и степенная функции" в курсе алгебры и начала анализа предусматривает знакомство учащихся с вопросами:

Обобщение понятия о степени; понятие о степени с иррациональным показателем; решение иррациональных уравнений и их систем;

показательная функция, ее свойства и график; основные показательные тождества: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; $(a^x)^y = a^{xy}$, тождественные преобразования показательных выражений; решение показательных уравнений, неравенств и систем; понятие об обратной функции; логарифмическая функция, ее свойства и график; основные логарифмические тождества: $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$; $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$; $\log_a x^p = p \log_a x$, тождественные преобразования логарифмических выражений; решение логарифмических уравнений, неравенств и систем; производная показательной функции; число е и натуральный логарифм; производная степенной функции; дифференциальное уравнение радиоактивного распада.

Показательная функция, подобно линейной и квадратичной, очень часто реализуется в физических, биологических и иных законах. И это, конечно, не является случайностью. В жизни нередко приходится встречаться с такими фактами, когда скорость изменения какой-либо величины пропорциональна самой величине (размножение бактерий, ход химической реакции и т.д.). В этом случае рассматриваемая величина будет изменяться по закону, имеющему вид: $y = y_0 * a^x$.

Широкое применение нашла логарифмическая функция в астрономии:

Например по ней изменяется величина блеска звезд, если сравнивать характеристики блеска отмеченные глазом и с помощью приборов, то можно составить следующий график:

Рис. 1

Здесь по вертикальной оси отложим блеск звезд в единицах Гиппарха (распределение звезд по субъективным характеристикам (на глаз) на 6 групп), а на горизонтальной - показания приборов.

По графику видно, что объективные и субъективные характеристики не пропорциональны, а прибор регистрирует возрастание блеска не на одну и ту же величину, а в 2,5 раза. Эта зависимость выражается логарифмической функцией.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов Ш.А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева. - М.: Просвящение, 2016. - 463 с.
2. Ананченко К.О. Общая методика преподавания математики в школе. - Мн., "Універсітэцкае",1997г. 160с.
3. Архипова Е.С., Быстрова Л.А.. Пособие по математике для дополнительных занятий со студентами 1 курса дневной формы обучения всех специальностей, а также с иностранными студентами. 2005 [Электронный ресурс]. URL - http://zavantag.com/docs/index-2651340.html
4. Башмаков М.И. Алгебра и начала математического анализа: учебник для учащихся 1011 классов. -- 2-е изд. -- М., 1992. С. 185, 303.
5. Вавилов В.В. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. / Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. - М.: Наука. Гл. ред. Физ-мат. Лит., 1988. - 240 с.
6. Виленкин Н.Я. Алгебра и математический анализ для 11 класса / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. - М.: Просвящение, 1993. - 288 с.
7. Вишнякова А.А.. Методика обучения решению показательной и логарифмической функций / А.А. Вишнякова, Т.А. Цецорина // Инновационные проекты и программы в психологии, педагогике и образовании. – 2018. – том 1. – 45-48 с.
8. Графики функций. Справочник, Под ред. И.И. Ляшко, К.: Наукова думка: 1990. С.430
9. Дадаян А.А. Математика.–М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2005. С.321
10. Егереев В.К. сборник задач по математике / В.К. Егереев, В.В. Зайцев, Б.А. Кордемский. - М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и образование», 2005. - 624 с.

11. Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын. - М.: Просвящение, 2001. - 384 с.

12. Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П. Алгебра и начала математического анализа: учебник для 1011 классов. 17-е изд. М., 2008. С. 201-261.

13. Колягин Ю.М."Методика преподавания математики в средней школе", М., "Просвещение", 1999г. С.190

14. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начала анализа / В.С. Крамор. - М.: Просвящение, 1990. - 416 с.

15. Куланин Е.Д. 3000 конкурсных задач по математике / Е.Д. Куланин, В.П. Норин, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. - М.: Рольф, 2002. - 624 с.

16. Куланин Е.Д. 3000 конкурсных задач по математике. 4-е изд., испр. И доп. – М.: Рольф, 2002 – с.624

17. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2012: учебно-методическое пособие\Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова.=Ростов-на-Дону:Легион-М,2011.-416 с. – (Готовимся к ЕГЭ)

18. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа: учебник для учащихся 1011 классов. -- 10-е изд. -- М., 2009. С. 232273.

19. Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин.-М.: Просвящение, 2008. - 430 с.

20. Образовательный порта - https://ege.sdamgia.ru/

21. Образовательный портал. – Режим доступа: https://ege.sdamgia.ru/

22. Петренко Н.Н. "Математическая лаборатория", М., "Просвещение",1997г.

23. Рогановский Н.М. Методика преподавания в средней школе, Мн., "Высшая школа", 1990г.

24. Сборник задач по математике для поступающий в втузы: Учеб. Пособин /В.К. Егерев, В.В. Зайцев, Б.А. Кордемский и др.; Под ред. М.И. Сканави. – 6-е изд., М.: «Оникс 21 век», «Мир и образование», «Альянс-В», 2001 – 608 с.

25. Стефанова Н.Л., Подходова Н.С. Методика и технология обучения математике. Курс лекции: пособие для вузов. - М., 2005.

26. Столяр А.А."Логические проблемы преподавания математики", Мн., "Высшая школа", 2000г.

27. Турецкий В.Я. Математика и информатика. — 3-е изд., испр. и доп. — М.:ИНФРА-М, 2002.

28. Федеральный институт педагогических измерений / Открытый банк заданий ЕГЭ / Математика, 2004-2018.

29. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача ,М., "Просвещение", 1998г.

30. Электронный ресурс URL: http://bukvi.ru/ekonomika/matematika/pokazatelnaya-i-logarifmicheskaya-funkcii.html