ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙНАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

ОРГАНИЗАЦИЯ И СОДЕРЖАНИЕ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА ПО МАТЕМАТИКЕ «ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРОГРЕССИИ»

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование, профиль Математика и информатика
очной формы обучения, группы 02041303
Выбловой Екатерины Юрьевны

Научный руководитель:
к. ф.-м. н., доцент
Мотькина Н.Н.

БЕЛГОРОД 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. В Федеральных государственных стандартах основного общего образования в результатах освоения основной образовательной программы по математике предусматривается как изучение основных математически объектов: чисел, геометрических фигур, алгебраических и аналитических моделей, так и «формирование представлений о математике как о способе познания окружающей действительности, которая позволяет описывать и исследовать реальные процессы и явления» [1]. Осуществить на практике эту идею представляется возможным, как во время уроков по математике, так и во время элективных курсов, которые помогут изучить историю появления основополагающих математических теорий, вклад ученых в развитие математической науки, углубить знания, которые были приобретены на уроках.

Такая тема как «Числовые последовательности» зародилась в давние времена, а некоторые задачи, связанные с последовательностями, возникли еще в глубокой древности. Само понятие ассоциируется с именами многих именитых ученых, которые уделили этой теме особое внимание и внесли огромный вклад в становление математической науки, таких как: Архимед, Эйлер Л., Эратосфен, Кардано Д., Бернулли Я., Пизанский Л., Маркушевич А. И., Люка Э. и др.

По результатам ОГЭ можно судить, что тема прогрессии является довольно сложной для усвоения учащимися. По нашему мнению, на занятиях элективного курса «Последовательности и прогрессии» основной целью будет: познакомить учащихся с двумя видами прогрессий, некоторыми известными последовательностями, при этом с максимальной опорой как на математический, так и на исторический материал.

Анализируя различную математическую литературу по данной теме, мы рассмотрели понятие числовой последовательности, способы задания числовых последовательностей, свойства числовых последовательностей, определение арифметической и геометрической прогрессий, их свойства, формулы общего члена и суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий; определение бесконечно убывающей геометрической прогрессии и формула суммы ее членов. Анализ учебно-методической литературы показывает, что теоретический материал во всех рассмотренных учебниках изложен почти идентично, но объем исторического материала в учебниках очень мал, либо он совсем отсутствует.

Можно предположить, что более подробное освещение данной темы возможно осуществить на занятиях элективного курса. На котором за счет использования исторического материала, решения нестандартных и древних задач на прогрессии повыситься интерес к предмету, а также позволит дополнительно подготовить учащихся к ОГЭ.

Стоит учесть, при разработке элективного курса опыт авторов посвятивших данной проблеме не мало работ, таких как: Шварцбурд С.И., Амосов Н.В., Семенов Е.Е., Саламатова Т.И., Поздняков И.И., Ермак Е.А., Шарыгин И.Ф.и др.

В школьном курсе основной школы ключевое внимание в теме «Числовые последовательности» уделяется изучению элементарных числовых последовательностей, а именно арифметическим и геометрическим прогрессиям. Также в текстах заданий основного государственного экзамена можно встретить задачи, относящиеся к разделу «Арифметические и геометрические прогрессии». Стоит отметить, что задачи по теме «Числовые последовательности и прогрессии» могут быть хорошим базовым этапом перед освоением дифференциального и интегрального исчисления. Всё выше описанное подтверждает, что выбранная тема исследования актуальна.

Объектом исследования является процесс изучения прогрессий и последовательностей на занятиях элективного курса «Последовательности и прогрессии».

Предметом исследования - методика разработки элективного курса по математике «Последовательности и прогрессии».

Цель работы заключается в разработке содержания элективного курса «Последовательности и прогрессии» для 9 класса.

Для достижения поставленной цели были выдвинуты следующие **задачи**:

1. Рассмотреть определение предпрофильного обучения на ступени основного общего образования;
2. Рассмотреть определение элективных курсов, их цели, виды, задачи, а также требования, предъявляемые к элективным курсам по математике;
3. Проанализировать основные учебники по алгебре 9 класса, изучить насколько в них освещены темы «Числовые последовательности» и «Прогрессии»;
4. Разработать программу элективного курса по математике «Последовательности и прогрессии»;
5. Разработать систему занятий элективного курса с теоретическими и практическими материалами.

Методы исследования были применены следующие: анализ математической, учебно-методической, научно-популярной литературы, изучение нормативных документов, изучение и обобщение опыта работы учителей; разработка методических материалов.

Структура работы: введение, две главы, заключение, список использованных источников, приложения.

В первой главе представлен анализ методической и научной литературы по теме исследования; раскрыта сущность предпрофильной подготовки в 9 классе; дано определение элективных курсов, а также его функции, задачи; раскрыты основные требования, предъявляемые к разработке элективного курса; принципы отбора задач к элективному курсу.

Во второй главе описывается содержание разработанной программы элективного курса, представлены конспекты занятий элективного курса «Последовательности и прогрессии».

1. Научно-методические и теоретические основы организации элективных курсов на этапе предпрофильного обучения

1.1 Содержание и организационно-методические основы предпрофильной подготовки

Понятие «предпрофильная подготовка» появилось недавно в современной педагогической науке, и оно начало довольно быстро внедряться в учебный процесс российских школ. Известно, что при переходе в 10 класс, на ступени полного среднего образования происходит внедрение системы профильного обучения. Разумеется, то, что еще на уровне основной школы, в 9 классе необходимо проводить постоянную системную подготовительную работу с учащимися, т.к. профильность обучения заставляет выпускников сделать предварительный выбор самоопределения в направлении своей будущей деятельности. Это и объясняет необходимость предпрофильной подготовки школьников еще в 9 классе и помощи в выборе профиля.

Определение предпрофильной подготовки на данный момент можно сформулировать следующим образом: это система педагогической, психолого-педагогической, информационной деятельности, направленная на содействие самоопределению учащихся старших классов основной школы касательно избираемого ими профиля будущего обучения и возможно даже направления будущей профессиональной деятельности. Насколько успешно будет складываться подготовка школьников к следующей ступени образования, а также процесс обучения в старших классах, во много зависит именно от этого выбора. И уже многими педагогами признано, что предпрофильная подготовка необходима для успешной реализации профильного обучения в старшей школе.

Проблемы при подготовке школьников к выбору профиля дальнейшей учебы возникают у учителей на протяжении всего обучения в основной школе. Ведь в 8-9 классах учителя должны предоставить обширную информацию о возможностях и путях продолжения образования после школы для получения средне специального образования, и конечно помочь школьникам дать оценку своим силам и возможностям.

Еще предпрофильную подготовку учащихся можно определить, как комплекс взаимосвязанных учебных программ и различных мероприятий, которые призваны поддержать ученика 9-го класса ориентировочно определиться с курсом его дальнейшего обучения.

Курсы по выбору должны вводится постепенно, если же ввести все курсы одновременно, то учащиеся могут быть поставлены в своем выборе в тупик. В профильном обучении меняется весь учебный план, а в предпрофильной подготовке к стандартному, базовому учебному плану добавляется некоторое количество экспериментальных курсов. Подразумевается, что ученики могут сделать ошибку при выборе курса, но эта ошибка может быть легко исправлена, тем что ученик может попробовать другой представленный курс.

Проанализировав действующие учебные планы, Шабанова М.В., определила минимальный объем предпрофильной подготовки в 100 часов, если считать 3 часа в неделю на 34 учебных недель в году [18].

Из этих 100 часов примерно 2 часа в неделю необходимо отвести на организованные кратковременные элективные курсы, которые выбрал школьник.

Какую-то долю часов необходимо уделить информационной работе, а именно знакомству с местными образовательными учреждениями среднего специального образования, изучение направлений, предоставляемых данными заведениями, в которых можно продолжить образование после 9 класса, посещение дней открытых дверей, условия приема в данные заведения. Еще необходимо уделить внимание мероприятиям профориентационной направленности, проведение психологических тестов и методик, анкетировании.

1.2 Понятие элективных курсов, их цели и требования к ним

Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования была принята в 2002 году. Суть Концепции состояла в том, что в дополнение к базовым и профильным курсам, были введены курсы по выбору, они же элективные курсы. И те, и другие курсы имели одну и ту же цель-развитие индивидуальных способностей и наклонностей. Только элективные курсы не входили в обязательную программу, а были курсами по выбору. С выходом Федерального закона от 1 декабря 2007 г. № 309-ФЗ при переходе на стандарты нового поколения элективные курсы стали элементами вариативной части учебного плана.

Элективные курсы на ступени предпрофильной подготовки общего образования могут быть организованы двух видов: ориентационные и пробные.

Пробные элективные курсы организовываются для того, чтобы ученик, попробовав изучать курс по какому-то учебному направлению, убедился или отказался от сделанного им выбора направления дальнейшего обучения, которое в последствии может перейти в профессиональную деятельность.

Ориентационные элективные курсы в предпрофильном обучении проводятся с целью поддержки учащегося в его профильном самоопределении, помочь раскрыть индивидуальные способности, поддержать интерес к выбранному направлению, показать многообразие видов деятельности.

Так до недавнего времени развитие креативности и творческих способностей учащихся, не рассматривалось как одна из целей образовательного процесса. Целями образования было усвоение готовых знаний, алгоритмов решения типовых задач. Сейчас же наблюдается увеличение творческой доли, а также развитие всесторонне развитой личности. И как один из способов более творческой подачи математики не только как предмета, который нужно сдать в экзаменационной форме ОГЭ и ЕГЭ, и существуют элективные курсы.

В Концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования было дано следующее определение элективным курсам: «Элективные курсы - обязательные для посещения курсы по выбору учащихся, входящие в состав профиля обучения на старшей ступени школы». Элективные курсы создаются для удовлетворения индивидуальных образовательных интересов, с учетом склонностей и способностей учащихся.

В школьной программе выделено три типа учебных курсов: нормативные, факультативные, элективные. Отличие элективных курсов от остальных, заключается в том, что из предложенного количества, школьник может выбрать те, которые ему наиболее нужны и интересны. Как только курс выбран, он становится нормативным, т.е. обязательным для посещения. С такой системой выбора курсов, начинается профессиональное разделение и дают некоторое направление ученику.

Элективные курсы играют большую роль в совершенствовании школьного образования. Они позволяют производить поиск и экспериментальную проверку нового содержания, новых методов обучения, а также варьировать объём и сложность изучаемого материла.

Так как большинство из элективных курсов являются авторским, для них не существуют образовательных стандартов. Это и является их особенностью: нестандартность и вариативность.

По-другому обстоит ситуация при профильном обучении в 10-11 классах. На старшей ступени обучения, школьники уже определились с профилем, значит элективные курсы должны носить систематичный характер и быть более продолжительными по времени. Здесь уже ставятся немного другие цели, в отличии от предпрофильного обучения. Целями является углубление и расширение знаний, знакомство с новыми разделами науки в рамках выбранного профиля.

Это и есть главные отличия элективных курсов на предпрофильном этапе и профильном. Требования к оформлению сходны. Более подробно остановимся на требованиях к элективным курсам в 9 классе, т.к. они краткосрочные и за короткий период учебного времени, нужно дать необходимую информацию.

Требования к элективным курсам предпрофильного обучения

- Избыточность (их должно быть много).
- Кратковременность (6–16 часов).
- Оригинальность названия и содержания.
- Результат курса должен соответствовать заданному типу деятельности: проект, творческое сочинение, контрольная работа и др.
- Нестандартность.

Можно выделить следующие *цели* элективных курсов:

- Углубление содержания базового курса, которое дает дополнительные возможности при подготовке к экзаменам;
- Удовлетворение образовательных интересов учащихся, в соответствии с их интересами, а также выходящий за рамки выбранного направления;
- Развитие математического мышления, всестороннее развитие, воспитание некоторых личностных качеств с помощью углубленного изучения математики

Для любого элективного курса должна быть составлена программа, имеющая конкретную структуру. Учебная программа – нормативный документ, в котором отображены, содержание, цели особенности оценки эффективности результатов процесса обучения конкретного учебного курса.

Требования к структуре программы элективных курсов:

1. Титульный лист

2. Пояснительная записка в которой должны содержаться: актуальность данной программы, обоснование необходимости программы; цели и задачи программы: цель должна отражать результат; указание внутрипредметных и

межпредметных связей; информация об учащихся, на которых рассчитана данная программа; перечисление необходимых ресурсов для осуществления программы.

3. Содержательная часть должна состоять из перечня тем с и кратким содержанием, указанием количества часов необходимого на их изучение.

4. Методическая часть состоит из: методических рекомендаций; требований к знаниям, умениям и навыкам, которые учащиеся должны получить в процессе курса; критерии эффективности реализации программы; формы и методы контроля; список рекомендуемой литературы.

5. В приложение добавляется тематическое планирование и дидактические материалы.

6. Экспертиза программы. Экспертиза программы может проводиться на школьном методсовете муниципального уровня.

Итак, можно сделать вывод что разработка элективного курса – это трудоемкий процесс, так как в процессе разработки необходимо придерживаться ряда вышеописанных правил, а также иметь большой запас знаний и умений.

1.3 Основные требования к отбору задач для занятий элективного курса

Элективный курс по математике можно представить, по сути, как одну тему которая рассматривается достаточно глубоко, например, наш элективный курс имеет название «Последовательности и прогрессии», а он может содержать несколько взаимосвязанных тем, например, «Арифметическая прогрессия», «Геометрическая прогрессия», «Решение задач из ОГЭ по арифметической и геометрическим прогрессиям.

Основной курс математики изучаемый на уроках служит источником тем, для более подробного изучения на элективных курсах. Но также учитель имеет право проводить элективные курсы не имеющие ничего общего с основным математическим курсом.

Элективный курс невозможно представить без набора задач и практической работы, которые соответствуют данному курсу. Задачи можно использовать как достаточно эффективное средство для усвоения школьниками основных изученных понятий, математической теории, практических умений и навыков в практическом применении математики.

В научной литературе выделяются следующие принципы отбора задач, для лучшего усвоения материала элективного курса:

1. Принцип преемственности. Задачи как нельзя лучше способствуют установлению преемственных связей между темами, так как сама задача подразумевает знание теорем, понятий по нескольким связанным темам. С помощью задач можно установить взаимосвязи между различными темами, понятиями из основного курса математики и элективного курса.

2. Принцип связи теории с практикой. В процессе обучения задачи помогают связать теорию с практикой, при этом практика может быть предшественником познания, так же сопровождать и быть его выводом. Задачи «должны не только заключать изучение теорем, понятий, но и предшествовать, и сопутствовать им, то есть выступать в качестве средства усвоения знаний» [15].

3. Принцип полноты, заключается в том, чтобы наиболее полно в совокупности задач были отражены основные математические идеи, а также примеры, устанавливающие межпредметные связи.

4. Принцип контрастности можно описать так: на начальном этапе изучения темы лучше всего давать школьникам контрастные виды заданий, не допускать постоянное повторение одних и тех же видов.

5. Система задач должна научить школьников эвристическим приемам, однако школьные учебники почти не содержат задач

способствующие их формированию. Потому имеют место задачи, которые смогут научить школьников данным приемам. Необходимо обучать таким эвристическим приемам: приём моделирования, индукция, прием простейших задач и т.д.

В литературе также выделяются и другие эвристические приёмы: введения вспомогательных элементов и нового неизвестного, достраивания фигуры, обобщения, постановки и выполнения производного задания, равносильного преобразования требования задачи, получения следствий и т.д.

6. Принцип развития исследовательских умений. Под исследовательскими умениями можно понимать вид познавательной деятельности, которой предполагает решения школьниками задач, с творческим поиском новых для них знаний в процессе решения.

Учебные исследования разделяются на несколько этапов: постановка проблемы, выдвижение гипотез, доказательство или опровержение гипотез. Самый частый случай, проблема учебного исследования должна быть сформулирована самим учителем. Элективные курсы должны способствовать развитию способностей к самостоятельной деятельности.

Поскольку в основном программа элективных курсов является авторской, от учеников требуется умение воспринимать материал, умение слушать и усваивать материал, конспектировать, выделять главную мысль, искать информацию в дополнительных источниках. Также необходимо включение в элективный курс различных практикумов, таких как:

- работа в группе с научными текстами, возможно с коллективным анализом, чтобы выделить основные понятия, постановки целей и т.д.;
- занятия с компьютерами, поиск информации в Интернете;
- подготовка публичных выступлений по заранее данной теме;
- работа с заданиями, которые учитель дает для самостоятельной работы на уроках элективного курса.

Заметим, что элективные курсы реализуются в школе за счет времени, отводимого на компонент образовательного учреждения. Именно поэтому в примерных учебных планах отдельных профилей в рамках времени, отводимого на элективные курсы, предусмотрены часы в старших классах на организацию учебных практик, проектов, исследовательской деятельности. При этом организация обучения в рамках элективного курса предполагает разделение класса, как минимум, на две подгруппы.

2. Разработка содержания элективного курса по математике «Последовательности и прогрессии»

2.1 Разработка программы элективного курса «Последовательности и прогрессии»

Разработанный элективный курс «Последовательности и прогрессии» для учеников 9 класса, предпрофильной подготовки, включает в себя как старые для учеников знания, которые были получены на уроках алгебры, так и новые исторические факты, и знания, которые не были изучены в базовом курсе математики.

После анализа школьных учебников из Федерального перечня учебников, можно сделать вывод что материал по числовым последовательностям и прогрессиям, представлен почти одинаково. Однако, объем исторического материала, широко представлен в учебнике алгебры 9 класса Дорофеева Г.В..

На занятиях элективного курса рассматриваются числовые последовательности, их свойства, формулы; арифметическая прогрессия, формула n-го члена, сумма первых n членов; геометрическая прогрессия, формулы n-го члена, суммы геометрической прогрессии. Также в достаточном объеме представлен исторический материал.

Необходимость внедрения данного курса в школьный процесс можно описать необходимостью дополнительной подготовки к общему государственному экзамену (ОГЭ), т.к. задания на последовательности прогрессии являются частью экзамена. Все темы представлены достаточно глубоко и обширно.

Описание курса: аннотация, цели и задачи курса, содержание, список рекомендованных учебно-методических средств обучения находится в Приложении А (см. Приложение А)

Таблица 1. Тематическое планирование

№	Тема	Количество часов	Форма организации
1	Числовые последовательности	1	Лекция. Фронтальная работа. Самостоятельная работа
2	Решение задач с числовыми последовательностями.	1	Работа у доски. Самостоятельная работа
3	Арифметическая прогрессия	1	Лекция. Фронтальная работа. Самостоятельная работа. Коллективная работа
4	Решение типовых тестовых заданий по числовой последовательности и арифметической прогрессии из заданий ОГЭ	1-2	Самостоятельная работа. Работа в паре
5	Геометрическая прогрессия	2	Лекция. Практическая работа. Самостоятельная работа.
6	Решение типовых тестовых задач на геометрическую прогрессию из заданий ОГЭ.	1-2	Фронтальная работа. Коллективная работа. Самостоятельная работа.
7	Задачи на вычисление сложных процентов	1	Лекция. Самостоятельная работа
8	Контрольная работа по итогам элективного курса	1	Контрольная работа

2.2 Разработка занятий элективного курса по математике «Последовательности и прогрессии»

Занятие №1. Тема: Числовые последовательности

Цель: сформировать представление о числовой последовательности; изучить способы задания числовых последовательностей; научить находить член последовательности по формуле n-го члена; находить формулу, которая задает последовательность.

I. Организационный момент.

II. Объяснение нового материала

Давайте выполним некоторые задания для определения сегодняшней темы. Продолжите ряд, указав еще два значения.

3 6 9 (12 15) (кратны 3)

2 4 6 (8 10) (кратны 2)

2 4 8 (16 32) (степень 2)

1 5 25 (125 625) (степень 5)

П в с ч п (с в) (понедельник, вторник...)

31 28 31 30 31 30 31 31 30 31 (30 31) (число дней в месяце 2018г)

10 -10 10 (-10 10)

1 4 9 16 25 (36 49) (квадраты натуральных чисел)

1 3 5 7 (9 11) (нечетные числа)

2/3 2/9 2/27 2/81 (2/243 2/729) (геометрическая прогрессия $q=1/3$)

Все выписанные примеры являются последовательностями.

В дальнейшем мы будем рассматривать только числовые последовательности. Числа, образующие последовательность, называются членами последовательности.

Определение: Числовая последовательность - это функция, заданная на множестве натуральных чисел.

Понятие числовой последовательности возникло и развилось задолго до создания учения о функции. Вот примеры бесконечных числовых последовательностей, известных еще в древности:

1, 2, 3, 4, 5, 6… - последовательность натуральных чисел;

2, 4, 6, 8, 10,12… - последовательность четных чисел;

1, 3, 5, 7, 9, 11… - последовательность нечетных чисел;

1, 4, 9, 16, 25, 36... - последовательность квадратов натуральных чисел;

2, 3, 5, 7, 11,13…- последовательность простых чисел;

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\ldots$ - последовательность чисел, обратных натуральным.

Число членов каждого из этих рядов бесконечно; первые пять последовательностей - монотонно возрастающие, последняя - монотонно убывающая. Последовательности бывают конечными и бесконечными, возрастающие и убывающие.

Последовательность называется возрастающей, если каждый следующий член больше предыдущего.

Последовательность называется убывающей, если каждый следующий член меньше предыдущего.

Убывающие и возрастающие последовательности называют монотонными последовательностями.

Обозначение: y_1, y_2, y_3, y_4, y_5:

1, 2, 3, 4, 5: n-порядковый номер члена последовательности.

(y_n)- последовательность, y_n- n-ый член последовательности.

(a_n)- последовательность, a_n- n-ый член последовательности.

a_{n-1}-предыдущий член последовательности,

a_{n+1}-последующий член последовательности.

Пример: предположим, у нас есть некоторый счет в банке, на который раз в месяц начисляют некоторую конкретную сумму денег. Так вот такое начисление можно описать в виде числовой последовательности: $y=a+n\cdot b$, где a - начальная сумма на счете, b – сумма которую каждый месяц начисляют, n – натуральное число.

Если мы хотим подсчитать какая сумма будет находиться в банке через 12 месяцев: $y(12)=a+12\cdot b$.

*Способы задания числовых последовательностей***:**

1. Аналитический способ

Последовательность задана аналитически, если задана формула n-ого члена последовательности.

Зная начальную формулу, нетрудно найти любой член последовательности. Давайте найдем 8 член последовательности, в исходной формуле $y_n = 1/n^2$ вместо n подставим 8:

$$y_8 = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64};$$

А вот если задана последовательность, но неизвестна формула для n-го члена, чаще всего удается задать последовательность в аналитическом виде.

Пример. Дана последовательность 5,15,20,25… Номер члена последовательности умножается на пять, тогда в аналитическом виде имеем: $y_n=5\cdot n$.

2. Словесное задание последовательности

Чаще всего такой способ применяют, когда нет возможности задать последовательность аналитически (или это очень сложно) или последовательность состоит из небольшого количества членов. Пример: 1,3,5,6,9,10,15.

Нашу последовательность задать в аналитической форме не представляется возможным, тогда просто произносят члены последовательности.

3. Рекуррентное задание последовательности

Данный способ позволяет вычислять члены последовательности, через предыдущие ее члены.

Используя данный способ, мы как бы всегда возвращаемся назад, вычисляя предыдущие члены. Почти всегда задана формула, позволяющая вычислять n-ый член через предыдущие члены.

Пример. y_1=2, y_2=4, $y_n = y_{n-1} - y_{n-2}$

Каждый новый член последовательности получается из разности двух предыдущих членов.

$$y_3 = y_2 - y_1 = 2$$

$$y_4 = y_3 - y_2 = -2\dots$$

Задание. Записать первые 5 членов последовательности:

a) От первого натурального числа увеличение на 3.

b) От 10 увеличение в 2 раза и уменьшение на 1.

c) От числа 6 чередовать увеличение на 2 и увеличение в 2 раза.

Занятие №2. Тема: Решение задач с числовыми последовательностями.

Цели: закрепить знания о числовых последовательностях; научиться решать задачи различными способами.

I. Актуализация знаний

Вопросы для повторения:

1. Что такое числовая последовательность?
2. Примеры бесконечных числовых последовательностей?
3. Способы задания числовых последовательностей?

II. Решение задач

Задачи на числовые последовательности:

Задача 1. Задать последовательность в аналитическом виде: а) 4,8,16…; б) 1,-1,1,-1…

Решение: а) $y_n = 2^n$

b) y_n= (-1)$^{n+1}$

Задача 2. Последовательность задана в аналитической форме y_n=*2n+10*.

Найти 10,50,63 член последовательности.

Решение: $y_{10} = 2 \cdot 10 + 10$=30

$y_{50} = 2 \cdot 50 + 10$=110

$y_{63} = 2 \cdot 63 + 10$=136

Задача 3. Последовательность задана в аналитической форме y_n=n^2+2.

Найти 5,10,13-й член последовательности.

Решение: y_5 =5^2+2=27

y_{10} =10^2+2=102

y_{13} =13^2+2=171

Задача 4. Последовательность задана в рекурсивном виде y_1=5, y_n=y_{n-1}−3

Найти 5 и 7 член последовательности.

Решение:

y_2=$y_{n-1} - 3 = 5 - 3 = 2$

y_3=$y_2 - 3 = 2 - 3 = -1$

y_4=$y_3 - 3 = \ -1 \ - 3 = -4$

y_5=$y_4 - 3 = \ -4 \ - 3 = -7$

y_6=$y_5 - 3 = \ -7 \ - 3 = -10$

y_7=$y_6 - 3 = \ -10 \ - 3 = -13$

Задача 5. Последовательность задана в рекурсивном виде

y_1=3, y_2=8, y_n=2 $\cdot$ y_{n-2}+3·y_{n-1}. Найти 3,4,5 член последовательности.

Решение:

y_3=2 $\cdot$ y_1+3·$y_2 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 8 = 30$

y_4=2 $\cdot$ y_2+3·$y_3 = 2 \cdot 8 + 3 \cdot 30 = 106$

y_5=2 $\cdot$ y_3+3·$y_4 = 2 \cdot 30 + 3 \cdot 106 = 378$

Задача 6. Найдите первые шесть членов последовательности заданной формулой *n*-го члена:

a) $x_n = \frac{n}{n+1}$

b) $x_n = (-1)^{n+1} \cdot 2$

c) $x_n = 0.5 \cdot 4^n$

Решение: a) $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{2}{3}$; $x_3 = \frac{3}{4}$; $x_4 = \frac{4}{5}$;$x_5 = \frac{5}{6}$; $x_6 = \frac{6}{7}$

b) $x_1 = (-1)^2 \cdot 2 = 2$

$x_2 = (-1)^3 \cdot 2 = -2$

$x_3 = (-1)^4 \cdot 2 = 2$

$x_4 = (-1)^5 \cdot 2 = -2$

$x_5 = (-1)^6 \cdot 2 = 2$

$x_6 = (-1)^7 \cdot 2 = -2$

c) $x_1 = 0.5 \cdot 4^1 = 2$

$x_2 = 0.5 \cdot 4^2 = 4$

$x_3 = 0.5 \cdot 4^3 = 32$

$x_4 = 0.5 \cdot 4^4 = 128$

$x_5 = 0.5 \cdot 4^5 = 512$

$x_6 = 0.5 \cdot 4^6 = 2048$

Занятие №3. Тема: Арифметическая прогрессия

Цели: познакомить учащихся с понятием арифметической прогрессии; сформировать умение находить n-й член и сумму первых n членов арифметической прогрессии; применять формулы.

I. Организационный момент.

II. Актуализация знаний.

Что такое последовательность?

Приведите пример последовательности, каждый член которой:

а) больше предыдущего в 3 раза;

б) меньше предыдущего на 3;

в) равен предыдущему.

Какая последовательность называется возрастающей? Убывающей?

III. Изучение нового материала

Задачи на прогрессии, дошедшие до нас из древности, были связаны с запросами хозяйственной жизни: распределение продуктов, деление наследства и др.

И как уже известно, понятие числовой последовательности возникло и развивалось задолго до создания учения о функциях.

На связь между прогрессиями первым обратил внимание великий Архимед. (ок. 287 – 212 гг. до н.э.).

Термин «прогрессия» был введён римским автором Боэцием (в 6 веке) и понимался в более широком смысле, как бесконечная числовая последовательность. Название «арифметическая» и «геометрическая» были перенесены из теории непрерывных пропорций, которыми занимались древние греки.

Формула суммы членов арифметической прогрессии была доказана древнегреческим учёным Диофантом (в 3 веке). Формула суммы членов геометрической прогрессии дана в книге Евклида «Начала» (в 3 веке до н.э.). Правило нахождения суммы членов произвольной арифметической прогрессии впервые встречается в сочинении «Книга абака» в 1202г. Леонардо Пизанского.

В XVIII веке в английских учебниках появились обозначения арифметической и геометрической прогрессии. Сегодня более подробно мы остановимся на арифметической прогрессии.

Давайте рассмотрим последовательность: 3, 8, 13, 18, 23, 28, ...

- Назовите первый член этой последовательности. (3)

- Какое число является пятым членом последовательности? (23)

- Назовите её восьмой член. (38)

- Каким свойством обладают члены данной последовательности?

(Каждый следующий отличается от предыдущего на 5, или каждое следующее число больше предыдущего на 5.)

Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом. Это число называется *разностью прогрессии*.

Какие из последовательностей являются арифметическими прогрессиями?

1. 4; 8; 16; 32; 64; ...
2. 7; 5; 3; 1; - 1; ...
3. 9,2; 11,3; 9,3; 11,4; 9,4; ...
4. 4,2; 4,5; 4,8; 5,1; 5,4; ...

Учащиеся анализируют записанные последовательности, выясняют, что арифметическими прогрессиями являются третья и пятая последовательности.

Укажите для арифметических прогрессий первый член и разность.

7; 5; 3; 1; - 1; a_1 = 7; d = - 2;

4,2; 4,5; 4,8; 5,1; 5,4; a_1 = 4,2; d = 0,3

Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов.

Примените это свойство для данных арифметических прогрессий.

7; 5; 3; 1; - 1; ... ($\frac{7+3}{2}$ = 5; $\frac{5+1}{2}$ = 3; $\frac{3+(-1)}{2}$ = 1);

4,2; 4,5; 4,8; 5,1; 5,4; ... ($\frac{4.2+4.8}{2}$ = 4,5; $\frac{4.5+5.1}{2}$= 4,8; $\frac{4.8+5.4}{2}$= 5,1).

Верно и обратное утверждение: если в последовательности каждый член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов, то эта последовательность является арифметической прогрессией.

Зная первый член и разность арифметической прогрессии, можно найти любой её член, пользуясь формулой *n*-го члена арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + d(n - 1).$$

Знакомство с формулами суммы *n* первых членов арифметической прогрессии.

При решении некоторых задач требуется найти сумму нескольких первых членов арифметической прогрессии. В этом случае можно воспользоваться одной из двух формул:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n \ \cdot n}{2}$$

$$S_n = \frac{2 \cdot a_1 + d(n-1)}{2} n$$

В каких случаях вы будете пользоваться первой формулой? Второй формулой?

Применение изученных формул.

Заполните таблицу:

№	a_1	d	n	a_n	S_n
1	3	2	5		
2	4	-1	7		
3	1,2	3	5		
4	-1,5	-2	7		
5		3	6	17	
6		2	8	9	
7	-2,1	4		13,9	
8	3	2,4		27	
9	-3		10		15
10			12	3	22,8

***Ключ* к тренажёру:**

№	a_1	d	n	a_n	S_n
1	3	2	5	11	35
2	4	-1	7	-2	7
3	1,2	3	5	13,2	36
4	-1,5	-2	7	-13,5	-52,5
5	-5	3	6	17	57
6	-23,1	2	8	9	16
7	-2,1	4	5	13,9	29,5
8	3	2,4	11	27	165
9	-3	1	10	6	15
10	0,8	0,2	12	3	22,8

Работа по заполнению таблицы ведётся фронтально.

Подведение итогов занятия.

- Какая последовательность называется арифметической прогрессией?

- Что такое разность арифметической прогрессии?

- Каким свойством обладают члены арифметической прогрессии?

- Как найти неизвестный член арифметической прогрессии?

-Каким образом ищется сумма n первых членов арифметической прогрессии?

Занятие №4. Тема: Решение типовых тестовых заданий по числовой последовательности и арифметической прогрессии из заданий ОГЭ

Цель: научится решать типовые задачи из вариантов ОГЭ; закрепить пройденный материал.

I. Актуализация знаний

II. Решение тестовых заданий

1.Последовательность задана формулой $c_n = n^2 - 1$. Какое из указанных чисел является членом этой последовательности?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

2. Последовательность задана формулой

$$c_n = n + \frac{(-1)^n}{n}.$$

Какое из следующих чисел не является членом этой последовательности?

1) $2\frac{1}{2}$ 2) $4\frac{1}{4}$ 3) $5\frac{1}{5}$ 4) $6\frac{1}{6}$

3. Какое из указанных чисел не является членом последовательности

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

1) $\frac{1}{2}$ 2) $-\frac{1}{3}$ 3) $\frac{1}{16}$ 4) $\frac{1}{17}$

4.Последовательность задана формулой

$$a_n = \frac{11}{n+1}.$$

Сколько членов в этой последовательности больше 1?

1) 8 2) 9 3) 10 4) 11

5. Последовательности заданы несколькими первыми членами. Одна из них — арифметическая прогрессия. Укажите ее.

1) 1;2;3;5;… 2) 1;2;4;8;.. 3) 1;3;5;7;.. 4) 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; ...

6. Какая из следующих последовательностей является арифметической прогрессией?

1) Последовательность натуральных степеней числа 2.

2) Последовательность натуральных чисел, кратных 5.

3) Последовательность кубов натуральных чисел.

4) Последовательность всех правильных дробей, числитель которых на 1 меньше знаменателя.

7. Последовательность задана условиями $c_1 = -3, c_{n+1} = c_n - 1,$. Найдите c_7.

8. Последовательность задана условиями

$$b_1 = 4, b_{n+1} = -\frac{1}{b_n}.$$

Найдите b_7.

9. Последовательность задана формулой

$$a_n = \frac{34}{n+1}.$$

Сколько членов в этой последовательности больше 6?

10. Последовательность задана формулой $a_n = \frac{16}{n+1}$. Сколько членов в этой последовательности больше 3?

Арифметическая прогрессия

1. Дана арифметическая прогрессия: -4; -2; 0;.. Найдите сумму первых десяти её членов.

2. Дана арифметическая прогрессия -7; -5; -3;..Найдите a_{16}.

3. Выписаны первые несколько членов арифметической прогрессии: 3; 6; 9; 12; Какое из следующих чисел есть среди членов этой прогрессии?

1) 83 2) 95 3) 100 4) 102

4. Арифметические прогрессии x_n, y_n и z_n заданы формулами n-го члена: $x_n = 2 \cdot n + 4$, $y_n = 4 \cdot n$, $z_n = 4 \cdot n + 2$

Укажите те из них, у которых разность d равна 4.

1) x_n иy_n 2) y_nи z_n 3) x_n, y_n, и z_n 4) x_n

5. В первом ряду кинозала 30 мест, а в каждом следующем на 2 места больше, чем в предыдущем. Сколько мест в ряду с номером n?

1) 28+2n 2) 30+2n 3) 32+2n 4) 2n

6. Арифметическая прогрессия задана условиями:$a_1 = 6, a_{n+1} = a_n + 6$. Какое из данных чисел является членом этой прогрессии?

1) 80 2) 56 3) 48 4) 32

7. Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии: −8,6; −8,4; ...

8. Арифметическая прогрессия задана условиями:

$a_1 = -3.1, a_{n+1} = a_n + 0.9$.

Найдите сумму первых 19 её членов.

9. Какое наибольшее число последовательных натуральных чисел, начиная с 1, можно сложить, чтобы получившаяся сумма была меньше 528?

10. Найдите сумму всех положительных членов арифметической прогрессии 11,2; 10,8; …

11. Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии –7,2; –6,9; …

12. Записаны первые три члена арифметической прогрессии: 20; 17; 14. Какое число стоит в этой арифметической прогрессии на 91-м месте?

13. Выписаны первые несколько членов арифметической прогрессии: −87; −76; −65; … Найдите первый положительный член этой прогрессии.

14. В первом ряду кинозала 24 места, а в каждом следующем на 2 больше, чем в предыдущем. Сколько мест в восьмом ряду?

15. Выписано несколько последовательных членов арифметической прогрессии: $\ldots; -9; x; -13; -15; \ldots$ Найдите член прогрессии, обозначенный буквой x.

16. Дан числовой набор. Его первое число равно 6,2, а каждое следующее число на 0,6 больше предыдущего. Найдите пятое число этого набора.

Ключ к тесту содержится в Приложении В (см. Приложение В).

Занятие №5. Тема: Геометрическая прогрессия

Цель: дать определение геометрической прогрессии, вывести формулу n-го члена, суммы геометрической прогрессии, научится решать задачи.

I. **Организационный момент**

II. **Актуализация знаний**

III. **Изучение нового материала**

Еще в древности итальянский математик монах Леонардо из Пизы (более известный под именем Фибоначчи) занимался решением практических нужд торговли. Перед монахом стояла задача определить, с помощью какого наименьшего количества гирь можно взвесить товар? В своих трудах Фибоначчи доказывает, что оптимальной является такая система гирь: 1, 2, 4, 8, 16... Это одна из первых ситуаций, в которой людям пришлось столкнуться с геометрической прогрессией.

Именно по трудам Л. Фибоначчи вся Европа осваивала арабские цифры, систему счета, а также практическую геометрию. Они оставались настольными учебниками, чуть ли не до эпохи Декарта. Но по иронии судьбы до нашего времени сохранилась память только об одной задаче из этой книги.

Некто поместил пару кроликов в некоем месте, огражденном со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится при этом в течение года, если природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производила на свет другую пару, а рождают кролики со второго месяца после своего рождения.

Именно в этой задаче появляется последовательность, обессмертившая имя Фибоначчи:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …

В этой последовательности сумма любых двух предыдущих чисел равна следующему числу: 1+2=3, 3+5=8, 5+8=13,… .Отношение любого числа последовательности к предыдущему колеблется вокруг значения, которое ещё в древности под названием золотого сечения: 1,61803398…

«Золотое сечение» определяется как такое положительное число, которое на единицу больше обратного к нему числа.

«Золотое сечение», как идеальная и приятная глазу пропорция человеческого тела и его элементов, широко использовалось многими художниками, начиная с другого великого Леонардо – Леонардо да Винчи.

Много интересного в арифметики чисел Фибоначчи. Каждое третье число Фибоначчи чётно, каждое четвёртое делится на три, каждое пятнадцатое оканчивается нулём, два соседних числа взаимно просты. Число a_n делится на число a_k тогда и только тогда, когда n делится на k.

В настоящее время, в жизненной практике, геометрическая прогрессия проявляется при вложении денежных средств в банк, когда сумма процентов начисляется на сумму, скопившуюся на счете за предыдущий период. Иными словами, если положить деньги на срочный вклад в сберегательный банк, то через год вклад увеличится на 7% от исходной суммы, т.е. новая сумма будет равна вкладу, умноженному на 1,07. Ещё через год уже эта сумма увеличится на 7%, т.е. получившаяся в тот раз сумма вновь умножится на 1,07 и так далее.

Есть еще много простых случаев, где применяется геометрическая прогрессия. Например, распространение гриппа: один человек заразил 4 человек, те в свою очередь заразили еще по 4 человека, и таким образом вторая волна заражения – 16 человек, а те в свою очередь, заразили еще 4 и т.д.

Допустим, у нас есть числовая последовательность:

2; 4; 6;8;10.

Можно сразу определить, что это - арифметическая прогрессия с разностью ее членов d = 2d. А как на счет такого:

1;10;100;1000

Если мы будем вычитать из последующего числа предыдущее, то увидим, что каждый раз получается новая разница (9;90;900 и т.д.), но последовательность определенно существует и ее несложно заметить – каждое следующие число в 10 раз больше предыдущего!

Такой вид числовой последовательности называется геометрической прогрессией и обозначается b_n.

Геометрическая прогрессия b_n - это числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число $q \neq 0$. Это число называется знаменателем геометрической прогрессии.

Ограничения, что первый член b_1 не равен 0 и $q \neq 0$ не случайны. Допустим, что их нет, и первый член все же равен 0, а q равно допустим 5, тогда получается:

$b_1 = 0$

$b_2 = 0 \cdot 5 = 0$... и так далее.

Теперь поговорим поподробнее о знаменателе геометрической прогрессии, то есть о q.

Повторим: q – это число, во сколько раз изменяется каждый последующий член геометрической прогрессии.

Допустим, что q у нас положительное. Пусть в нашем случае q=3, а

$b_1 = 4$. Чему равен второй член b_2 и b_3?

b_2=4·3=12

b_3=12·3=36

Соответственно, если q>0, то все последующие члены прогрессии имеют одинаковый знак – они положительны.

Если q отрицательное? Например, q=–3, а b_1=4. Чему равен второй член b_2 и b_3?

b_2=4·(–3)=–12

b_3=–12·(–3)=36

Таким образом, если $q<0$, то знаки членов геометрической прогрессии чередуются.

Теперь немного потренируемся: попробуй определить, какие числовые последовательности являются геометрической прогрессией, а какие арифметической:

1. 3; 6; 12; 24; 48; 56…
2. 1; 12; 23; 34; 45 …
3. −99; 33; −11…
4. 5; 7; 9; 11; 13…
5. −6; 5; 17; 28; 39…
6. 64; 16; 4; 1…
7. 2; 4; 8; 18…

Геометрическая прогрессия – 3, 6.

Арифметическая прогрессия – 2, 4.

Не является ни арифметической, ни геометрической прогрессиями - 1, 5, 7.

Вернемся к нашей последней прогрессии $q=-3$, а $b_1=4$ и попробуем так же, как и в арифметической найти ее 6 член. Есть два способа его нахождения.

Последовательно умножаем каждый член на q.

1. $b_2 = 4\cdot(-3) = -12$
2. $b_3 = -12\cdot(-3) = 36$
3. $b_4 = 36\cdot(-3) = -108$
4. $b_5 = -108\cdot(-3) = 324$
5. $b_6 = 324\cdot(-3) = -972$

Итак, 6-ой член описанной геометрической прогрессии равен −972.

Выведем формулу для нахождения n-го члена арифметической прогрессии.

Если нам нужно найти значение числа прогрессии с порядковым номером, то мы умножаем первый член геометрической прогрессии b_1 на знаменатель q в степени, которая на единицу меньше, чем порядковый номер искомого числа.

Проиллюстрируем это на примере нахождения 4-го члена данной прогрессии:

Иными словами:

b_4=4· $(-3)^{4-1}$=4· $(-3)^3$=–108

Найди самостоятельно значение члена n= 6 заданной геометрической прогрессии.

b_6=b_1·q^{6-1}

b_6=4· $(-3)^{6-1}$=4·$(-3)^5$=–972

Такой же ответ получился при последовательном нахождении 6 члена арифметической прогрессии.

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ – формула n-го члена геометрической прогрессии.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Совсем недавно мы говорили о том, что q может быть, как больше, так и меньше нуля, однако, есть особые значения q при которых геометрическая прогрессия называется бесконечно убывающей.

При $-1<q<1$ – прогрессия называется бесконечно убывающей. Для начала запишем какую-нибудь геометрическую прогрессию, состоящую из 4 членов.

Допустим, b_1=1, а q=1/2 , тогда:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$b_2 = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$b_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$b_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Мы видим, что каждый последующий член меньше предыдущего в 1/2 раза, она постоянно убывает, но нулем никогда не становится.

Теперь изучим формулу, которая позволяет найти n-й член прогрессии, зная *n-1* и *n+1* члены геометрической прогрессии, а также для чисел, равноудаленных от n-го члена:

$b_n = \sqrt{b_{n+k} \cdot b_{n-k}}$, при $k < n$

Воспользуемся этой формулой, для нахождения b_2 в последовательности 6; ?; 54…

$b_2 = \sqrt{b_3 \cdot b_1} = \sqrt{6 \cdot 54} = \sqrt{324} = \pm 18.$

Проверим какой из двух корней нам подходит, для этого необходимо поверить одинаковое ли q между всеми ее членами.

1) $q = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = 3$

2) $q = \frac{-18}{6} = \frac{54}{-18} = -3$

Таким образом у нас получились две разные прогрессии, с разными знаменателями q.

Примеры для тренировки:

1. $b_1 = -1, b_5 = -81.$ Найти b_3.
2. $b_2 = 128, b_6 = 8.$ Найти b_4
3. $b_3 = 18, b_6 = 486.$ Найти b_4.

Решение: 1. $b_3 = \sqrt{b_{3-2} \cdot b_{3+2}} = \sqrt{-1 \cdot (-81)} = \sqrt{81} = \pm 9$

1. $b_4 = \sqrt{b_{4-2} \cdot b_{4+2}} = \sqrt{128 \cdot 8} = \sqrt{1024} = \pm 32$

2. В этом случае номера данных чисел не равноудалены от b_4, потому мы не можем применить формулу, тогда распишем из чего состоит каждое заданное число:

$$b_3 = b_1 \cdot q^2$$

$$b_6 = b_5 \cdot q = b_1 \cdot q^5$$

$$\frac{b_6}{b_3} = \frac{b_1 \cdot q^5}{b_1 \cdot q^2} = q^3$$

Подставляем данные $\frac{b_6}{b_3} = \frac{486}{18} = 27; q^3 = 27; q = 3.$

Теперь можно найти $b_4 = b_3 \cdot q = 18 \cdot 3 = 54$

Сумма членов геометрической прогрессии.

Рассмотрим формулу, позволяющую посчитать сумму членов геометрической прогрессии на заданном промежутке:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \; q \neq 1$$

Формула для бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1}{1 - q}$$

Как и по арифметической, так и по геометрической прогрессии существует множество легенд. Одна из них – легенда о Сете, создателе шахмат.

Многие знают, что шахматная игра была придумана в Индии. Когда индусский царь познакомился с нею, он был восхищен ее остроумием и разнообразием возможных в ней положений. Узнав, что она изобретена одним из его подданных, царь решил лично наградить его. Он вызвал изобретателя к себе и приказал просить у него все, что он пожелает, пообещав исполнить даже самое искусное желание.

Сета попросил время на размышления, а когда на другой день Сета явился к царю, он удивил царя беспримерной скромностью своей просьбы. Он попросил выдать за первую клетку шахматной доски 1 пшеничное зерно, за вторую 2 пшеничных зерна, за третью −4, за четвертую −8 и т.д.

Царь разгневался, и прогнал Сета, сказав, что просьба слуги недостойна царской щедрости, но пообещал, что слуга получит свои зерна за все 64 клетки доски.

А теперь вопрос: используя формулу суммы членов геометрической прогрессии, посчитать, сколько зерен должен получить Сета?

$q = 2.$ Всего клеток на шахматной доске 64. $n = 64.$ Подставляем в формулу суммы геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{1(2^{64}-1)}{2-1} = 2^{64} - 1.$$

Получается большое число:

$$2^{64} = 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{4}$$

$$2^{64} = 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 64$$

Итоговым значением выражения будет 18 446 7440737095516151844674 4073709551615.

То есть:

18 квинтильонов 446 квадрильонов 744 триллиона 73 миллиарда 709 ми ллионов 551 тысяч 615.

А теперь решим простую задачку на сумму членов геометрической прогрессии.

Ученик 5 А класса Вася, заболел гриппом, но продолжает ходить в школу. Каждый день Вася заражает двух человек, которые, в свою очередь, заражают еще двух человек и так далее. Всего в классе 31 человек. Через сколько дней гриппом будет болеть весь класс?

Итак, первый член геометрической прогрессии — это Вася, то есть 1 человек. 2-ой член геометрической прогрессии, это те два человека, которых он заразил в первый день своего прихода. Общая сумма членов прогрессии равна количеству учащихся 5А. Соответственно, мы говорим о прогрессии, в которой:

$$b_1 = 1; q = 2; S_n = 31$$

$$31 = \frac{1\ \ 2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1;$$

$$2^n = 31 + 1;\ 2^n = 32;\ 2^n = 2^5; n = 5$$

Весь класс заболеет за 5 дней.

Потренируемся.

1. Найдите сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с b_1 =9 и q=$\frac{1}{3}$.

2. Найдите сумму первых 3 членов геометрической прогрессии с b_1=64 и q=$\frac{1}{4}$.

3. Найдите сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с b_1=2 и q=$\frac{1}{4}$.

Решение:

1. $S_n = \frac{b_1}{1-q}$; $S_n = \frac{9}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{\frac{2}{3}} = 9 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{2} = 13{,}5$

2. $S_n = \frac{64(1-(\frac{1}{4})^3)}{1-\frac{1}{4}} = \frac{64\cdot(1-\frac{1}{64})}{\frac{3}{4}} = \frac{64\cdot\frac{63}{64}}{\frac{3}{4}} = \frac{63}{\frac{3}{4}} = 84$

3. $S_n = \frac{2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{\frac{3}{4}} = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

Занятие №6. Тема: Решение типовых тестовых задач на геометрическую прогрессию из заданий ОГЭ.

Цель: закрепить полученные знания, повторить формулы, закрепить ход решения типовых задач.

I. **Организационный момент**

II. **Решение тестовых заданий**

Тест на геометрические прогрессии:

1. В геометрической прогрессии b_n известно, что $b_1 = 2, q = -2$.. Найти пятый член этой прогрессии.

2. Геометрическая прогрессия b_n задана формулой n-го члена

$$b_n = 2 \cdot (-3)^{n-1} .$$

Укажите четвертый член этой прогрессии

3. Дана геометрическая прогрессия b_n, знаменатель которой равен 2, а $b_1 = -3/4$.Найдите сумму первых шести её членов.

4. В геометрической прогрессии сумма первого и второго членов равна 75, а сумма второго и третьего членов равна 150. Найдите первые три члена этой прогрессии.

5. Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии: 17, 68, 272, ... Найдите её четвёртый член.

6. Выписано несколько последовательных членов геометрической прогрессии: …; 150; x; 6; 1,2; … Найдите член прогрессии, обозначенный буквой x.

7. Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии: −1024; −256; −64; … Найдите сумму первых 5 её членов.

8. Геометрическая прогрессия задана условием

$$b_n = 164 \cdot (\tfrac{1}{2})^n .$$

Найдите сумму первых её 4 членов.

9. Дана геометрическая прогрессия b_n для которой $b_5 = -14$, b_8 = 112. Найдите знаменатель прогрессии.

10. Дана геометрическая прогрессия b_n, знаменатель которой равен 2, а b_1 = 16. Найдите b_4.

Ключ к тесту в Приложении В (см. Приложение В).

Занятие №7. Тема: Задачи на вычисление сложных процентов

Цель: научится решать задачи на сложные проценты, которые встречаются в ЕГЭ и имеют практическую значимость.

I. Организационный момент

II. Изучение нового материала

Все мы бываем в банке и возможно делаем вклады под годовые проценты, но не совсем понятно, как посчитать свою возможную прибыль. Попробуем сегодня в этом разобраться.

Вклад может иметь разные условия, зависящие от срока, размера первоначальной суммы, а также процента, который может начисляться двумя способами-простым и сложным.

Простые проценты начисляются в конце срока вклада. Например, если мы сделаем вклад размером 100 рублей под 5% годовых, то в конце срока на счету будет 105 рублей.

Вклад со сложным расчетом процентов, имеет следующие начисления: проценты начисляются к сумме вклада с какой-то периодичностью (капитализация), и рассчитываются, не от первоначальной суммы, а от накопленной.

Допустим, размер вклада составил 100 рублей под 5% годовых, но с ежемесячной капитализацией.

Т.е. положили 100 рублей и к концу месяца, вклад должен состоять из 100 рублей и процента по ним:

$$100+100\cdot x\%;$$

$$100\cdot(1+x\%)$$

$$5\%=\frac{5}{100}.$$

И т.к. начисления производятся ежемесячно процент нужно умножить на 12. Так мы узнаем сумму, получившуюся после 1 месяца вклада.

$$1\text{ месяц} = 100\cdot\left(1+\frac{5}{100\cdot 12}\right) = 100{,}41667$$

Формула для вычисления размера вклада к концу второго месяца

$$100 \cdot \quad 1 + \frac{5}{100 \cdot 12} \quad \cdot \quad 1 + \frac{5}{100 \cdot 12}$$

Т.е. сумму первоначального вклада умножается на одно и тоже число, значит это является геометрической прогрессией.

Соответственно, можно сделать вывод, чтобы вычислить размер вклада к концу года нужно воспользоваться формулой:

$$100 \cdot (1 + \frac{5}{100 \cdot 12})^{12} \approx 105{,}12.$$

Общая формула для вычисления сложных процентов:

$$A = a \cdot (1 + \frac{p}{100})^{n},$$

где *a* – начальная сумма вклада, *p* – процент вклада, *n* – срок вклада.

Как можно заметить в первый год сумма под простой процент выходит больше. Но если вклад на более длительный срок, то вклад под сложный процент более выгодный.

Рассмотрим еще одну *задачу:*

Компания начала инвестировать в отрасль в 2015 году, имея капитал 6000 долларов. Каждый год, начиная с 2016 года, она получает прибыль, которая составляет 100% от капитала предыдущего года. Сколько прибыли получит компания по окончанию 2018 года, если прибыль из оборота не изымалась?

Решение:

$$b_1 = 6000; \text{капитал в 2015 году}$$

$b_2 = 6000 \cdot \quad 1 + \frac{100\%}{100} \quad = 6000 \cdot \quad 1 + 1 \quad = 6000 \cdot 2 = 12000$ капитал в 2016 году

$b_3 = 6000 \cdot \quad 1 + \frac{100\%}{100} \quad \cdot \quad 1 + \frac{100\%}{100} \quad = 6000 \cdot 4 = 24000$ капитал в 2017 году

$b_4 = 6000 \cdot \quad 1 + \frac{100\%}{100} \quad \cdot \quad 1 + \frac{100\%}{100} \quad \cdot \quad 1 + \frac{100\%}{100} \quad = 6000 \cdot 8 =$ 48000 капитал в 2018 году.

Задача: Вкладчик положил на депозит $ 3000 под 9% годовых на 10 лет. Какая сумма будет на счету конце 10-го года при годовой капитализации? На сколько вырастет сумма по сравнению с первоначальным взносом?

Решение: Применяем формулу сложных процентов для нахождения суммы в конце срока:

$$A = a \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$$

$$A = 3000 \cdot (1 + \frac{9}{100})^{10} = 3000 \cdot 2{,}367 = 7102{,}09$$

Чтобы ответить на второй вопрос, от значения 7102,09 вычитаем сумму вклада:

$$7102{,}09 - 3000 = 4102{,}09$$

Разница составляет 4102 доллара.

Занятие №8. Тема: Контрольная работа по итогам элективного курса.

Контрольная работа.

Числовые последовательности

1. Найдите три первых члена последовательности a_n, если

$$a_1 = -3, a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 2.$$

Решение: $a_2 = 3 \cdot \ -3 \ + 2 = -7$

$a_3 = 3 \cdot \ -7 \ + 2 = -19$

$a_4 = 3 \cdot \ -19 \ + 2 = -55$

Ответ: -3,-7,-19,-55.

2. Последовательность задана формулой n-го члена $a_n = n^2 + 4n + 2$. Найдите количество членов этой прогрессии, которые меньше числа 25.

Решение: $a_1 = 1^2 + 4 \cdot 1 + 2 = 7$;

$a_2 = 2^2 + 4 \cdot 2 + 2 = 14$;

$a_3 = 3^2 + 4 \cdot 3 + 2 = 23$;

$a_4 = 4^2 + 4 \cdot 4 + 2 = 34$ (Не подходит)

Ответ: 3.

3. Последовательность a_n задана формулой n-го члена $a_n = 6n - 1$. Является ли членом той последовательности число 1) 17; 2) 36? В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.

Решение: 1) $6n - 1 = 17$;

$6n = 17 + 1$

$6n = 18$

$n = 3$.

Число 17 является 3 членом последовательности.

2) $6n - 1 = 36$;

$6n = 36 + 1$

$6n = 37$. Нацело не делится, значит число 36 не является членом последовательности.

Ответ: 1)3; 2) не является членом прогрессии.

Арифметическая прогрессия

4. Найдите первый отрицательный член арифметической прогрессии 5,3; 4,9; 4,5; … .

Решение: $d = 4.9 - 5.3 = -0.4$

$5.3 + \ -0.4 \ \ n - 1 \ < 0$;

$5.3 - 0.4n + 0.4 < 0$;

$5.7 - 0.4n < 0$;

$-0.4n < -5.7$;

$n > 5.7/0.4$;

$n > 14.25$;

$a_{15} = 5.3 - 0.4 \cdot 14 = -0.3$.

Ответ: -0,3.

5. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии a_n, если $a_7 + a_3 = -8$ и $a_8 - a_5 = -6$.

Решение: $a_7 + a_3 = -8$;

$a_1 + 6d + a_1 + 2d = -8$;

$2a_1 + 8d = -8$;

$a_1 + 4d = -4;$

$a_8 - a_5 = -6$

$a_1 + 7d - a_1 - 4d = -6;$

$3d = -6;$

$d = -2;$

Подставим $a_1 + 4 \cdot \ \ -2 \ \ = -4; a_1 = -4 + 8 = 4.$

Ответ: $a_1 = 4$

6. Арифметическая прогрессия a_n задана формулой n-го члена:

$$a_n = 2n - 3.$$

Найдите сумму тридцати шести первых членов прогрессии.

Решение: $S_n = \frac{2 \cdot a_1 + d(n-1)}{2} n;$

$a_1 = 2 \cdot 1 - 3 = -1;$

$a_2 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$

$d = 2$

$S_{36} = \frac{2 \cdot (-1) + 2(36-1)}{2} 36 = \frac{-2+70}{2} \cdot 36 = 1224$

Ответ: 1224

Геометрическая прогрессия

7. Между числами 16 и 81 вставьте три числа, чтобы они вместе с данными числами образовывали геометрическую прогрессию. Запишите полученную прогрессию.

Решение: 16; ?; ?; ?; 81

$b_3 = \sqrt{b_{n+2} \cdot b_{n-2}} = \sqrt{b_5 \cdot b_1} = \sqrt{81 \cdot 16} = \sqrt{1296} = 36;$

16; ?; 36; ?; 81

$b_2 = \sqrt{b_{n+1} \cdot b_{n-1}} = \sqrt{b_3 \cdot b_1} = \sqrt{36 \cdot 16} = \sqrt{576} = 24;$

$b_4 = \sqrt{b_5 \cdot b_3} = \sqrt{81 \cdot 36} = \sqrt{2916} = 54;$

16; 24; 36; 54; 81

Ответ: 16; 24; 36; 54; 81.

8. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии b_n , если

$b_{10} = 9b_8$ и $b_3 + b_6 = 168.$

Решение: Распишем $b_3 + b_6 = 168$

$b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^5 = 168$

$b_1 \cdot q^2 (1 + q^3) = 168;$

Теперь $b_1 \cdot q^9 = 9b_1 \cdot q^7$; Сокращаем обе части

$q^2 = 9; q = 3$

Подставляем q в первое равенство

$b_1 \cdot 3^2 (1 + 3^3) = 168;$

$b_1 \cdot 9 (1 + 27) = 168;$

$9b_1 = \frac{168}{28} = 6$

$b_1 = \frac{2}{3}.$

Ответ: 2/3.

9. Геометрическая прогрессия b_n задана формулой n-го члена

$$b_n = 3 \cdot 2^{n+1}.$$

Найдите сумму шести первых членов прогрессии.

Решение: $b_1 = 3 \cdot 2^2 = 12$

$b_2 = 3 \cdot 2^3 = 24$

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{24}{12} = 2$$

$$S_6 = \frac{12 \cdot (2^6 - 1)}{2 - 1} = 756$$

Ответ: 756.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тема «Прогрессии» и «Числовые последовательности» изучается в курсе алгебры 9 класса, а также задачи по этим темам содержаться в материалах общего государственного экзамена. И чтобы углубить и закрепить материал, пройденный во время уроков, научиться уверенно решать, как стандартные, так и нестандартные задачи, помочь в подготовке к ОГЭ, учащимся может быть предложен элективный курс по математике «Последовательности и прогрессии», в качестве курса по выбору на этапе предпрофильного обучения.

Каждое занятие элективного курса было тщательно проработано и продумано. Новым темам предшествует исторический материал, рассказ о знаменитой последовательности Фибоначчи, который вызовет интерес у учащихся к данной теме, а возможно и к предмету в целом.

Разработан тренажер по арифметическим прогрессиям, который научит быстро решать задания по арифметическим прогрессиям, умело пользоваться формулами. В качестве одной из тем предлагается тема «Задачи на сложные проценты» связанная с геометрическими прогрессиями. Эта тема позволит учащимся на практике увидеть зачем нужны прогрессии и как их можно использовать на практике, а также с такого рода задачами школьники могут столкнуться при сдаче ЕГЭ в 11 классе.

Сформированы задания для итоговой контрольной работы, результаты которой покажут, насколько хорошо учащиеся усвоили пройденный материал.

Особое внимание было уделено заданиям ОГЭ. Были подобраны тесты с материалами из ОГЭ прошлых лет. Тесты закрытого типа: учащийся должен выбрать из предложенных ответов, так и открытого типа: ученик сам находит ответ и записывает его. Это позволит научится решать одно из сложных заданий экзамена. А значит элективный курс будет иметь практическую значимость.

Таким образом цель и задачи, сформулированные в данной выпускной квалификационной работе, были достигнуты.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федеральный государственный стандарт основного общего образования (утвержден приказом Минобрнауки России от 17 декабря 2010 г. №1897)

2. Об утверждении Концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования Министерство образования Российской Федерации. Приказ от 18 июля 2002 года № 2783.

3. Азиев Н. Тема «Арифметическая и геометрическая прогрессии», 9 кл. // Математика. Еженедельное учебно-методическое приложение к газете Первое сентября. 2004. № 23. - С. 14-17.

4. Виноградова, Л. В. Методика преподавания математики в средней школе: Учеб. пособие / Л. В. Виноградова. - Ростов-на-Дону.: Феникс, 2005. - 252 с.

5. Зубрилин А.А. О некоторых проблемах внедрения элективных курсов/ Педагогика. - 2007. - № 7. - С. 32 — 34

6. Инютина Е.В., Симонов А.С. Геометрическая прогрессия в экономике // Математика в школе: научно-теоретический и методический журнал. 2010. № 5. - М.: ООО Школьная пресса. - С. 18-21.

7. Балаян Э.Н.: Справочник по математике для подготовки к ОГЭ и ГИА; М.: изд. «Просвещение»,2016. - 52 с.

8. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б. Алгебра 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций /под ред. С.А. Теляковского. -21-е изд.- М.: Просвещение, 2014. - 271с.

9. Манвелов, С.Г. Конструирование современного урока математики: Кн. для учителя / С.Г. Манвелов. – М.: Просвещение, 2002. – 175 с.

10. Мерзляк А.Г. Алгебра: 9 класс: дидактические материалы: пособие для учащихся общеобразовательных организаций/ А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, Е.М. Рабинович и др.- М.: Вентана-Граф, 2017. - 128 с.

11. Мерзляк А.Г. Алгебра: 9 класс: самостоятельные и контрольные работы: пособие для учащихся общеобразовательных организаций/ А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, Е.М. Рабинович и др.- М.: Вентана-Граф, 2018. - 80 с.

12. Мещеряков Г.П. Нестандартные задачи на прогрессии // Математика в школе: научно-теоретический и методический журнал. 1998. № 6. - М.: ООО Школьная пресса. - С. 47-49.

13. Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа / С.М. Никольский. -М.: Просвещение, 2009. - 464 с.

14. Рязановский А.Р., Мухин Д.Г.: Математика 9 класс Основной государственный экзамен. Сборник экзаменационных тестов 15 типовых вариантов. Ответы. -М. изд. «Экзамен»,2016. - 97 с.

15. Саранцев Г. И. Методика обучения математике в средней школе: Учебное пособие для студентов пед. вузов и ун-тов / Г. И. Саранцев. - М.: Просвещение, 2002. - 224 с.

16. Семенов А.В., Ященко И.В., Шестаков С.А., Трепалин А.С., Захаров П.И.; ОГЭ 2017. Математика. 9 класс. Комплекс материалов для подготовки учащихся – М.; изд. «Интеллект- Центр»,2016. -129 с.

17. Семенов А.Я., Ященко И.В. 3000 задач с ответами по математике/ М.: изд. «Просвещение»,2016. - 147 с.

18. Шабанова М.В. Элективные математические курсы: Учебное пособие / Шабанова М.В., Безумова О.Л., Котова С.Н., Минькина Е.З., Попов И.Н.; Поморский гос. Ун-т им. М.В. Ломоносова. – Архангельск: Поморский университет, 2005. - 315 с.

19. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач. Учебное пособие для 10 кл. сред. шк. - М.: Просвещение, 1989. - 352 с.

20. Ященко И.В., Шестаков С.А., Трепалин А.С., Семенов А.В., Захаров П.И.; ОГЭ 2017. Математика. 9 класс, 10 вариантов. Типовые тестовые задания (в новой форме) – М.; изд. «Просвещение» ,2016. - 250 с.

Приложение А

Программа элективного курса по математике «Последовательности и прогрессии»

Аннотация.

Элективный курс «Последовательности и прогрессии» включает в себя как старые, так и новые для учащихся средней школы знания, не содержащиеся в базовых курсах математики.

Материалы могут быть использованы в работе учителями математики для учащихся 9 классов в целях предпрофильной подготовки.

Объем курса-10 часов.

Целью данного курса являются:

1. Пополнение знаний учащихся по теме «Прогрессии»;
2. Удовлетворение индивидуального запроса на образовательные услуги;
3. Развитие логического мышления;
4. Развитие творческих способностей учащегося на основе самостоятельного приобретения знаний с помощью умения работать с печатной и электронной литературой;
5. Уточнение готовности и способности освоения выбранного предмета на повышенном уровне в физико-математическом классе;

Данный элективный курс призван решить следующие **задачи**:

- развивать математические способности;
- предоставить возможность пополнения знаний по теме «Прогрессии»;
- формировать логическое мышление;

Курс учит поиску нетрадиционных решений, самостоятельной работе, самопроверке и требует от учащегося активности, настойчивости, целеустремленности, внимания, способности аргументировано отстаивать свои взгляды. Он способствует развитию творческих способностей, формирует пониманию красоты и изящества математических рассуждений. Предлагаемый курс является развитием системы ранее приобретенных программных знаний и расширяет базовый курс по математике, создает целостное представление о теме, дает учащимся возможность познакомиться с интересами, нестандартными вопросами алгебры, проверить способности к математике.

Программа курса рассчитана на 10 часов. Освоение материала предусмотрено от простого к сложному, от теории к практике.

Формой итогового контроля является контрольная работа.

Предлагаемый предметный курс по выбору позволит понять учащимся важность темы в математическом образовании, расширить свой кругозор, применить полученные знания не только в математике, но и в других науках, а главное в самоопределении, в выборе профиля обучения и уточнения готовности и способности учащегося осваивать выбранный курс на повышенном уровне.

Планирование занятий:

Тема 1. Последовательности. (2 часа)

Числовая последовательность. Формула n -го члена. Способы задания числовой последовательности. Решение задач на числовые последовательности.

Тема 2. Арифметическая прогрессия (3 часа)

История возникновения. Арифметическая прогрессия, формулы n-ого члена и суммы n-первых членов, характеристические свойства арифметической, решение задач, решение тестовых задач из тестов ОГЭ.

Тема 3. Геометрическая прогрессия. (4 часа)

Определение геометрической прогрессии. Формула n -го члена. Нахождение знаменателя геометрической прогрессии. Сумма n первых членов геометрической прогрессии. Задачи на сложные проценты. Задачи из ОГЭ.

Список литературы для учителей

1. Ященко И.В., Шестаков С.А., Трепалин А.С., Семенов А.В., Захаров П.И.; ОГЭ 2017. Математика. 9 класс, 10 вариантов. Типовые тестовые задания (в новой форме) – М.; изд. «Просвещение» ,2016. – 148 с.

2. Семенов А.В., Ященко И.В., Шестаков С.А., Трепалин А.С., Захаров П.И.; ОГЭ 2017. Математика. 9 класс. Комплекс материалов для подготовки учащихся – М.; изд. «Интеллект- Центр»,2016. – 56 с.

3. А.Р. Рязановский, Д.Г. Мухин: Математика 9 класс Основной государственный экзамен. Сборник экзаменационных тестов15 типовых вариантов. Ответы. -М. изд. «Экзамен»,2016. – 97 с.

4. Балаян Э.Н.: Справочник по математике для подготовки к ОГЭ и ГИА; М.: изд. «Просвещение»,2016. - 125 с.

5. 3000 задач с ответами по математике Семенов А.Я., Ященко И.В. М.: изд. «Просвещение»,2016. – 189 с.

Список литературы для учащихся

1. Семенов А.В., Ященко И.В., Шестаков С.А., Трепалин А.С., Захаров П.И.; ОГЭ 2017. Математика. 9 класс, 10 вариантов. Типовые тестовые задания (в новой форме) – М.; изд. «Интеллект- центр» ,2016. – 97 с.

2. 3000 задач с ответами по математике Семенов А.Я., Ященко И.В. М.: изд. «Просвещение»,2016. – 297 с.

Интернет –ресурсы:

http://www.fipi.ru/Федеральный институт педагогический измерений;

http://mathgia.ru/or/gia12/Main/Открытый банк заданий для подготовки к ГИА по математике;

http://mathege.ru/or/ege/Main/Открытый банк заданий для подготовки к ЕГЭ по математике;

http://reshuege.ru/Образовательный портал для подготовки к экзамену по математике.

Приложение В

Ключ к тестам:

	Числовые последовательности	*Арифметическая прогрессия*	*Геометрическая прогрессия*
1	3	50	32
2	3	23	-54
3	4	4	-47,25
4	2	2	25,50,100
5	3	1	1088
6	2	3	30
7	-9	-189,2	-1364
8	4	95	153,75
9	4	31	-2
10	4	162,4	128
11		-90	
12		-250	
13		1	
14		38	
15		-11	
16		8,6	