ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра математики

Методика изучения степени с рациональным показателем

Выпускная квалификационная работа магистранта

очной формы обучения
направления подготовки 44.04.01. Педагогическое образование, магистерская программа «Математическое образование»
2 года обучения группы 02041610
Юсупова Олега Шухратовича

Научный руководитель
Доцент кафедры математики к.ф. – м.н.
Сокольский А.Г.

Рецензент
Директор МОУ «Октябрьская СОШ им.Юрия Чумака»
Черендина Л.В.

БЕЛГОРОД 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В математике реальные процессы описываются на особом математическом языке и в виде математических моделей. Выражение a^x называется степенью (где a – основание степени, x показатель степени) и является формой выражения обширного класса процессов, называемых процессами естественного роста или убывания величин.

Иначе говоря, данное выражение является моделью функции, которая называется показательной, занимающей важное место среди трансцендентных функций.

Примеры процессов, происходящих в реальной действительности, которые достаточно полно и точно можно описать с помощью данной функции:

· распад радиоактивных веществ;

· изменение атмосферного давления с изменением высоты над уровнем моря;

· падение температуры охлаждаемых тел;

· размножение живых организмов (размножение холерного вибриона);

· изменение вклада в сберегательной кассе, положенного под определенный годовой процент и др.

Слово «трансцендентный» происходит от латинских слов transcendens–transcendo, т.е. «выхожу за границу». Термин «трансцендентный» стал впервые применять Л. Эйлер (1707–1783) в 1775 г.

2) Важную роль в вычислительной технике играют таблицы, а также шкалы значений показательной функции в счетных приборах (счетные линейки, номограммы). Выделяют значимые частные случаи показательных функций $y = 10^x, y = e^x$ – экспоненциальная функция и её график экспоненту.

3) Классические задачи показательного роста и убывания приводят к дифференциальным уравнениям, решением которых служит показательная функция.

Итак, показательная функция в школьном курсе математики:

·имеет значимую роль в математическом образовании; в формировании диалектического, функционального стиля мышления;

·раскрывает общенаучную и общекультурную роль математики;

·создает возможности эстетического, экологического воспитания и профессиональной ориентации учащихся.

Из вышесказанного следует **проблема исследования**, которая состоит в рассмотрении теоретических основ степени с рациональным показателем и методики ее изучения в школьном курсе математики. Проблема исследования определяет тему выпускной квалификационной работы: «Изучения степени с рациональным показателем в профильных классах».

Объект исследования – процесс изучения степени с рациональным показателем в профильных классах.

Предмет исследования – методика изучения степени с рациональным показателем в профильных классах.

Цель исследования – на основе учебной, научной и методической литературы изучить основные теоретические сведения, связанные со степенью с рациональным показателем; раскрыть общие методические положения, на которые нужно обратить внимание при изложении тем в профильных классах.

Достижение цели обусловило постановку следующих **задач исследования:**

1. Провести анализ учебной и методической литературы по проблеме исследования.

2. Выявить роль степени с рациональным показателем в обучении математики.

3. Разработать урок изучения нового материала на тему «Степень с рациональным показателем. Свойства степени» и урок обобщения и систематизации знаний на тему «Степень с рациональным показателем» для учеников 10–11 профильных классов.

4. Разработать систему тренировочных упражнений для учащихся 10– 11 профильных классов по подготовке к ЕГЭ.

Практическая значимость работы заключается в том, что она может быть использована в качестве методического пособия для учителей при планировании и проведении уроков по теме: «Степень с рациональным показателем», а также для обучающихся средней школы в подготовке к ЕГЭ.

Структура работы: работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованной литературы и трех приложений.

В первой главе рассматриваются теоретические сведения, связанные со степенью с рациональным показателем.

Вторая глава посвящена методике изучения степени в школьном курсе математики, где даются рекомендации по обучению основных свойств степени с рациональным показателем.

В приложении 1 приведен урок закрепления изученного материала на тему «Степень с рациональным показателем. Свойства степеней» для учеников 10–го профильного класса.

В приложении 2 представлен урок обобщения и систематизации знаний на тему «Степень с рациональным показателем» для учеников 11– го профильного класса.

В приложении 3 приведена система тренировочных упражнений на тему: «Степень с рациональным показателем. Подготовка к ЕГЭ»

1 Степень с рациональным показателем в профильных класса

1.1 Определение степени с рациональным показателем

Простейшие математические выражения стали известны людям еще в глубокой древности. В то же время постоянно шло совершенствование как самих операций, так и их записи на том или ином носителе. В частности, в Древнем Египте, чьи ученые внесли заметный вклад как в развитие элементарной арифметики, так и в создание основ алгебры и геометрии, обратили внимание на то, что когда происходит умножение какого–либо числа на одно и то же число много раз, то на это тратится огромное количество ненужных усилий. Более того, такая операция вела к значительным финансовым затратам: согласно действовавшим тогда установкам на оформление любых записей, каждой действие с числом должно было подробно описываться. Если вспомнить, что даже самый простейший папирус стоил весьма внушительную сумму денег, то не стоит удивляться тем усилиям, которые египтяне приложили, чтобы найти выход из этой ситуации.

Решение нашел знаменитый Диофант Александрийский, который придумал специальный математический знак, который стал показывать, сколько раз необходимо умножить то или иное число на само себя. Впоследствии известный французский математик Р. Декарт усовершенствовал написание этого выражения, предложив при обозначении степени чисел просто приписывать ее в правом верхнем углу над основным числом. Завершающим аккордом в письменном оформлении степени чисел стала деятельность небезызвестного Н. Шюке, который ввел в научный оборот сначала отрицательную, а затем и нулевую степень. Что же означает фраза «возвести степень»? Для начала необходимо понять, что само по себе возведение в степень представляет собой одну из важнейших бинарных математических операций, суть которой состоит в неоднократном умножении числа на само себя.

Известно, что множество рациональных чисел состоит из целых и дробных чисел, причем каждое дробное число может быть представлено в виде положительной или отрицательной обыкновенной дроби.

Рассмотрим степень с дробным показателем вида $a^{\frac{m}{n}}$. Чтобы сохраняло силу свойство степени в степени, должно выполняться равенство $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n} n} = a^m$. Если учесть полученное равенство $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^m$ и то, как мы определили корень n–ой степени, то логично принять $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ при условии, что при данных m, n и a выражение $\sqrt[n]{a^m}$ имеет смысл.

Несложно проверить, что при $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ справедливы все свойства степени с целым показателем (это сделано в разделе свойства степени с рациональным показателем).

Приведенные рассуждения позволяют сделать следующий **вывод**: если при данных m, n и a выражение $\sqrt[n]{a^m}$ имеет смысл, то степенью числа a с дробным показателем m/n называют корень n–ой степени из a в степени m.

Это утверждение вплотную подводит нас к определению степени с дробным показателем. Остается лишь расписать, при каких m, n и a имеет смысл выражение $\sqrt[n]{a^m}$. В зависимости от ограничений, накладываемых на m, n и a существуют два основных подхода [5,с.268].

1. Проще всего наложить ограничение на a, приняв $a \geq 0$ для положительных m и $a > 0$ для отрицательных m (так как при $m \leq 0$ степень 0^m не определена). Тогда мы получаем следующее определение степени с дробным показателем.

Определение.

Степенью положительного числа *a* с дробным показателем *m/n*, где m – целое, а n – натуральное число, называется корень n–ой из числа a в степени m, то есть, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Также определяется дробная степень нуля с той лишь оговоркой, что показатель должен быть положительным.

Определение.

Степень нуля с дробным положительным показателем *m/n*, где m – целое положительное, а n – натуральное число, определяется как $0^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{0^m = 0}.$ При $\frac{m}{n} < 0$ степень $0^{\frac{m}{n}}$ не определяется, то есть, степень числа нуль с дробным отрицательным показателем не имеет смысла.

Следует отметить, что при таком определении степени с дробным показателем существует один нюанс: при некоторых отрицательных a и некоторых m и n выражение $\sqrt[n]{a^m}$ имеет смысл, а мы отбросили эти случаи, введя условие *a≥0*. Например, имеют смысл записи $\sqrt[3]{(-5)^2, \sqrt[7]{(-1{,}2)^5} \text{ или } \sqrt[4]{(-\frac{1}{2})^{-8}}}$ или, а данное выше определение заставляет нас говорить, что степени с дробным показателем вида $(-5)^{\frac{2}{3}}, (-1{,}2)^{\frac{5}{7}}, (-\frac{1}{2})^{-\frac{8}{4}}$ не имеют смысла, так как основание не должно быть отрицательным [16].

2. Другой подход к определению степени с дробным показателем *m/n* заключается в раздельном рассмотрении четных и нечетных показателях корня $\sqrt[n]{a^m}$. Этот подход требует дополнительного условия: степень числа a, показателем которой является сократимая обыкновенная дробь, считается степенью числа a, показателем которой является соответствующая несократимая дробь (важность этого условия поясним чуть ниже). То есть, если *m/n* – несократимая дробь, то для любого натурального числа k степень $a^{\frac{mk}{nk}}$ предварительно заменяется на $a^{\frac{m}{n}}$.

При четных n и положительных m выражение $\sqrt[n]{a^m}$ имеет смысл при любом неотрицательном a (корень четной степени из отрицательного числа не имеет смысла), при отрицательных m число a должно быть еще отличным от нуля (иначе будет деление на нуль). А при нечетных n и положительных m число a может быть любым (корень нечетной степени определен для любого действительного числа), а при отрицательных m число a должно быть отличным от нуля (чтобы не было деления на нуль) [31].

Приведенные рассуждения приводят нас к такому определению степени с дробным показателем.

Определение.

Пусть *m/n* – несократимая дробь, m – целое, а n – натуральное число. Для любой сократимой обыкновенной дроби $\frac{mk}{nk}$ степень $a^{\frac{mk}{nk}}$ заменяется на $a^{\frac{m}{n}}$. Степень числа a с несократимым дробным показателем *m/n* – это $\sqrt[n]{a^m}$ для:

1. любого действительного числа a, целого положительного m и нечетного натурального n, например, $2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{5^2}, (-5,1)^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{(-5,1)^2}, 0^{\frac{5}{19}} = \sqrt[19]{0^5}$;

2. любого отличного от нуля действительного числа a, целого отрицательного m и нечетного n, к примеру, $2^{-\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^{-5}}, (-5,1)^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{(-5,1)^{-2}}$;

3. любого неотрицательного числа a, целого положительного m и четного n, например, $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2^1}, (5,1)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(5,1)^3}, 0^{\frac{7}{18}} = \sqrt[18]{0^7}$;

4. любого положительного a, целого отрицательного m и четного n, к примеру, $2^{-\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2^{-1}}, (5,1)^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{(5,1)^{-3}}$;

5. в остальных случаях степень с дробным показателем не определяется, как например не определены степени $(2)^{\frac{11}{6}}, (-2\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}, 0^{-\frac{2}{5}}$.

Поясним, зачем степень с сократимым дробным показателем предварительно заменяется степенью с несократимым показателем. Если бы мы просто определили степень $a^{\frac{m}{n}}$. как $\sqrt[n]{a^m}$, и не оговорились о несократимости дроби *m/n*, то мы бы столкнулись с ситуациями, подобными следующей: так как *6/10=3/5*, то должно выполняться равенство

$$(-1)^{\frac{6}{10}} = (-1)^{\frac{3}{5}}, (-1)^{\frac{6}{10}} = \sqrt[10]{(-1)^6} = \sqrt[10]{1} = \sqrt[10]{1^{10} = 1} \text{ но, а}$$

$$(-1)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-1)^3 = \sqrt[5]{-1} = -\sqrt[5]{1} = -\sqrt[5]{1^5 = -1}}.$$

Заметим, что первое определение степени с дробным показателем удобнее в применении, чем второе. Поэтому мы в дальнейшем будем использовать именно его.

Итак, **степень положительного числа *a* с дробным показателем *m/n*** мы определяем как $\sqrt[n]{a^m}$, для отрицательных a записи $a^{\frac{m}{n}}$ мы не придаем никакого смысла, степень числа нуль мы определяем для положительных дробных показателей *m/n* как $0^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{0^m = 0}$, для отрицательных дробных показателей степень числа нуль не определяем [16].

В заключение этого пункта обратим внимание на то, что дробный показатель степени может быть записан в виде десятичной дроби или смешанного числа, например, $5^{1,7}$, $(3\frac{2}{5})^{-2\frac{3}{7}}$.

Для вычисления значений выражений подобного вида нужно показатель степени записать в виде обыкновенной дроби, после чего воспользоваться определением степени с дробным показателем. Для указанных примеров имеем

$$5^{1,7} = 5^{\frac{17}{10}} = \sqrt[10]{5^7}$$

и

$$(3\frac{2}{5})^{-2\frac{3}{7}} = (3\frac{2}{5})^{-\frac{17}{7}} = \sqrt[7]{(3\frac{2}{5})^{-17}}.$$

Степень числа 0 определена только для положительных показателей;

по определению $0^r = 0$, для любого $r > 0$ [12].

Замечания

1. Из определения степени с рациональным показателем следует, что для любого положительного a и любого рационального r число a^r положительно.

2. Любое рациональное число допускает различные записи его в виде дроби, поскольку $\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$ для любого натурального k. Значение a^r также не зависит от формы записи рационального числа r.

3. При $a < 0$ рациональная степень числа a не определяется.

Для степеней с рациональным показателем сохраняются основные свойства степеней, верные для любых показателей (при условии, что основание степени будет положительным).

Из практики решения всех более сложных алгебраических задач и опририрования со степенями возникла необходимость обобщения понятия степени и расширения его посредством введения в качестве показателя нуля, отрицательных и дробных чисел [29].

Равенство $a^0 = 1$ (для $a \neq 0$) применял в своих трудах в начале XV в. самаркандский ученый аль–Каши. Независимо от него нулевой показатель был введен Н. Шюке в XV в. Последний ввел и отрицательные показатели степени. Идея дробных показателей содержится у французского математика Н. Орема (XIV в.) в его труде «Алгоритм пропорций». Вместо нашего знака $2^{1/2}$ он писал $^{1/2}2'$. Орем словесно формулирует правила действия со степенями, например (в современной записи):

$(a^n)^{1/m} = a^{n/m}$,

$a^{1/n} * b^{1/n} = (ab)^{1/n}$

Позже дробные, как и отрицательные, показатели встречаются в «Полной арифметике» (1544) немецкого математика М. Штифеля и у С. Стевина. Последний пишет о том, что корень степени *n* из числа *a* можно считать как степень *a* с дробным показателем[6]

1/n (a >0).

О целесообразности введения нулевого, отрицательных и дробных показателей и современных символов впервые подробно писал в 1665 г. английский математик Джон Валлис. Его дело завершил И. Ньютон, который стал систематически применять новые символы, после чего они вошли в общий обиход.

Введение степени с рациональным показателем является одним из многих примеров обобщения понятия математического действия. Степень с нулевым, отрицательным и дробным показателями определяется таким образом, чтобы к ней были применимы те же правила действий, которые имеют место для степени с натуральным показателем, т. е. чтобы сохранились основные свойства первоначально определенного понятия степени, а именно [17]:

$(ab)^n = a^n * b^n$,

$(a/b)^n = a^n/b^n$,

$(a^m)^n = a^{mn}$,

$a^m * a^n = a^{m+n}$,

$a^m/a^n = a^{m-n}$.

Новое определение степени с рациональным показателем не противоречит старому определению степени с натуральным показателем, т. е. смысл нового определения степени с рациональным показателем сохраняется и для частного случая степени с натуральным показателем. Этот принцип, соблюдаемый при обобщении математических понятий, называется принципом перманентности (сохранения, постоянства). В несовершенной форме его высказал в 1830 г.

английский математик Дж. Пикок, полностью и четко его установил немецкий математик Г. Ганкель в 1867 г. Принцип перманентности соблюдается и при обобщении понятия числа и расширении его до понятия действительного числа, а до этого – при введении понятия умножения на дробь и т. п [7].

1.2 Содержание и анализ материала в различных школьных учебниках

Анализ материала, посвященного решению степени с рациональным показателем, в учебнике «Алгебра и начала анализа» для 10–11 классов, изд. А. Н. Колмогоров и в учебнике «Алгебра и начала анализа» для 10–11 классов авторов Ш. Алимов и др. Указывает, что различные типы выражений представлены в учебниках математики для средней школы. Таким образом, задача учителя – сформировать умение у обучающихся к решению выражений любого рода [14].

Рассмотрите содержание материала по теме «Степень с рациональным показателем», содержащиеся в различных учебниках по математике в течение 10–11 классов средней школы, чтобы сравнить, проанализировать и сформировать наиболее подходящий метод реализации эта тема в школьной математике.

Башмаков М.И. Алгебра и начало анализа. 10–11

Учебник разделен на 6 глав. Каждая глава начинается со списка вопросов и заданий. Затем будут обобщены результаты, которые будут достигнуты после изучения главы. В главе представлен материал по теме «Степень с рациональным показателем» [27].

Четвертая глава «Иллюстративные и логарифмические функции» и пятая глава «Интеграл и ее приложения» не содержат ссылок на поле тригонометрии в целом, а в шестой главе «Уравнения и неравенства», тригонометрические уравнения и неравенства также происходят [10].

Переходя к главе III в теме «Степень с рациональным показателем» М.И. Башмаков считает необходимым повторить такие темы, как: измерения углов; отношения в треугольнике; вращательное движение; Компьютерная инженерия. Следующая запись: определение и простейшие свойства тригонометрических функций; формулы сокращения; значения тригонометрических функций.

И здесь мы представляем основное тригонометрическое тождество.

Здесь М. И. Башмаков исследует решения простейших тригонометрических уравнений в тригонометрическом круге[11].

В следующих разделах на тему «Степень с рациональным показателем» и «Идентичные преобразования». Только тогда в разделе «Решение уравнений и неравенств» представлены различные типы уравнений и некоторые типы неравенств. И, соответственно, здесь мы говорим о путях и методах решения.

Схема изучения темы «Решение тригонометрических уравнений и неравенств» определяется следующим образом [3].

Мордкович А.Г. Алгебра и начало анализа. 10–11

Учебник разделен на 8 глав. В конце каждой главы четко изложены основные результаты исследования. Преподавание математики в 10–м классе начинается с изучения «Степень с рациональным показателем». Здесь автор вводит понятие тригонометрической окружности на координатной плоскости, понятия синуса и косинуса, связанные с ними основные тригонометрические отношения, решения простых уравнений в тригонометрических кругах. Таким образом, формулы восстановления вводятся после изучения тригонометрических функций углового аргумента. Далее рассмотрим свойства и графики тригонометрических функций [3].

Во второй главе «Степень с рациональным показателем» мы детально рассмотрим решения каждого простого уравнения, основанного на ранее введенных понятиях синуса дуги, арккосинуса, арктангенса. В той же главе мы рассматриваем такие методы решения, как: факторинг и введение новой переменной; метод решения однородных тригонометрических уравнений. Другие методы решения изучаются после третьей главы «Трансформация мощности с рациональным показателем».

Здесь схема исследования выглядит так: функция → уравнения → преобразования.

С точки зрения использования учебников Мордковича он подходит для самостоятельного изучения, поскольку он содержит сильную теоретическую основу. Презентация теоретического материала осуществляется очень подробно. Учитывая острую нехватку часов для обучения в классе, это увеличивает важность самостоятельной работы студентов с книгой. Основываясь на учебнике, учителя хорошо знают, что нужно говорить ученикам в классе и что им предлагать, просто чтобы читать дома.

Недостатками можно объяснить не очень большое количество упражнений по теме в учебнике. [19]

Колмогоров А.Н. Алгебра и начало анализа

Учебник содержит 4 главы. Схема изучения учебного материала по теме «Степень с рациональным показателем» радикально отличается от предыдущих, поскольку тригонометрические функции сначала рассматривают численный аргумент и основные формулы тригонометрии. В первой главе, но чуть позже, основные свойства тригонометрических функций, их графики и их исследования. Затем введем понятие арксинуса, дугового косинуса и арккотангенса и «параллельно» с решением тригонометрических уравнений и неравенств. Автор упоминает методы решения тригонометрических уравнений и описывает алгоритм их решения. То же самое относится к решениям тригонометрических неравенств.

Таким образом, схема исследования выглядит так: преобразования → функции → уравнения [18].

Стоит отметить, что учебник содержит много дидактических материалов, как простых, так и более сложных. Этот курс позволяет учителю варьировать задачи для студентов.

С точки зрения представления теоретического материала нельзя сказать, что учебник идеален для самостоятельного изучения. [14]

Анализ содержания набора задач по теме «Степень с рациональным показателем» приводит к следующим выводам:

1) преобладают простые тригонометрические уравнения, решение которых основано на определениях соответствующих функций с точки зрения понятия арксинуса, арккосинуса и арктангенса числа;

2) практически нет тригонометрических уравнений, метод решения, основанный на свойстве ограниченного синуса и косинуса;

3) когда речь идет о методах решения тригонометрических уравнений с помощью методов единственных преобразований тригонометрических и

алгебраических выражений, следует отметить, что эти методы представлены в пособии скудным и монотонным образом [7].

Будем рассматривать методы одинаковых преобразований:

а) тригонометрические выражения:

– Принятие использования основных тригонометрических тождеств;

– принятие использования формул с двойным и половинным аргументами;

– принятие преобразования суммы тригонометрических выражений в произведение;

б) алгебраические выражения:

– Принятие факторизации;

– Принятие преобразования тригонометрических выражений, являющегося однородным многочленом относительно синуса и косинуса.

Использование этих методов приводит к тригонометрическим уравнениям, которые можно разделить на следующие типы:

а) сводятся к квадрату по отношению к тригонометрической функции;

б) сводится к дробно–рациональным функциям по тригонометрическим функциям;

в) приводимые к однородным;

d) приводим к форме (f_1 (x) –α_1) (f_2 (x) –α_2) ... (fn (x) –an) = 0, где fi (x) – тригонометрическая функция αi∈R. [16, с / 55].

Из практики решения все более сложных алгебраических задач и работы со степенями стало необходимым обобщить понятие степени и расширить его, введя в качестве показателя нулевые, отрицательные и дробные числа.

Равенство a0 = 1 (для) использовалось в его работах в начале 15 века. Самаркандский ученый аль–Каши. Независимо от этого, нулевой индекс был введен Н. Шюк в 15 веке. Последний введен и отрицательные показатели. Идея дробных показателей содержится во французском математике Н. Ореме (XIV век) в его работе «Алгоритм пропорций».

Позже дробные, а также отрицательные индикаторы находятся в «Полная арифметика» (1544) немецкого математика М. Штифеля и С. Стевина. Последний пишет, что корень степени n в a можно рассматривать как степень a с дробным показателем [24].

Целесообразность введения нулевого, отрицательного и дробного показателей и современных символов была впервые подробно описана в 1665 году английским математиком Джоном Уоллисом. Его дело было завершено И. Ньютоном, который начал систематически применять новые символы, после чего они вступили в общее пользование.

Введение мощности с рациональным показателем является одним из многих примеров обобщения понятия математического действия. Степень с нулевым, отрицательным и дробным показателями определяется таким образом, что к нему применимы те же правила действия, которые применяются к мощности с естественным показателем.

Новое определение степени с рациональным показателем не противоречит старому определению степени с естественным показателем, т. Е. Значение нового определения степени с рациональным показателем сохраняется для частного случая степени с естественным показатель. Этот принцип, наблюдаемый в обобщении математических понятий, называется принципом постоянства (сохранения, постоянства). В несовершенной форме он был выражен в 1830 году английским математиком Дж. Пикоком, полностью и четко установленным немецким математиком Г. Ханкелем в 1867 году. Принцип постоянства также наблюдается в обобщении понятия числа и его продолжении понятие реального числа, а до этого – введение понятия умножения на дробь и т. д [16].

1.3 Роль и место степени с рациональным показателем в профильных классах

Программа работы учебного курса по алгебре и начала математического анализа для 10 класса была изменена на основе приблизительной программы среднего (полного) общего образования для математики с учетом требований федерального компонента Государственного стандарта основного среднего (полного) общего образования, используя рекомендации авторской программы. Никольский и другие.

Программа работы определяет содержание предмета образовательного стандарта и дает распределение учебных часов по разделам курса [16].

Программа работы имеет две основные функции:

Информационно–методическая функция позволяет всем участникам образовательного процесса получить представление о целях, содержании, общей стратегии образования, воспитания и развития учащихся с помощью этого предмета.

Организационная и планировочная функция предусматривает разделение этапов обучения, структурирование учебного материала, определение его количественных и качественных характеристик на каждом этапе, в том числе для значимого заполнения промежуточной аттестации студентов.

Учебно–методический набор включает:

1. Алгебра и начало математического анализа. 10 класс: Учебное пособие для учебных заведений: базовый и профинансированный уровень С.М. Никольский и другие – М.: Просвещение, 2011.

2. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Программы по алгебре и по главам математического анализа. 10–11 классов. М .: Образование, 2010.

3. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начало математического анализа. 10 класс: учебник для студентов общеобразовательных учреждений (базовый и профильный уровни). М .: Образование, 2011.

4. Потапов М.К., Шевкин А.В. Алгебра и начало математического анализа: книга для учителей. 10 (базовый и профильный уровни). Москва: Образование, 2008.

5. Потапов М.К., Шевкин А.В. Алгебра и начало математического анализа: Дидактические материалы. 10 (базовый и профильный уровни). М .: Образование, 2011.

6. Шепелева Ю.В. Алгебра и начало математического анализа. Тематические тесты. 10 (базовый и профильный уровни). М .: Образование, 2011.

Эта программа работы полностью отражает уровень профиля обучения школьников в разделах программы. Он определяет содержание тем образовательного стандарта и дает приблизительное распределение часов класса по разделам курса [11].

Цели обучения

• Формирование представлений о математике как универсальном языке науки, инструмент моделирования явлений и процессов, идей и методов математики;

• развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критического мышления на уровне, необходимом для обучения в высшей школе по соответствующей специальности, в будущей профессиональной деятельности;

• овладение математическими знаниями и навыками, необходимыми в повседневной жизни, а также для изучения школьных естественнонаучных дисциплин на базовом уровне, для получения образования в областях, которые не требуют углубленной математической подготовки;

• образование в средствах математики культуры личности (отношение к математике как к части всеобщей культуры, знакомство с историей развития математики, эволюция математических идей, понимание важности математики для социального прогресса) ,

При изучении курса математики на уровне профиля продолжаются и развиваются строки содержания «Алгебра», «Функции», «Уравнения и неравенства», «Элементы комбинаторики, теории вероятностей, статистики и логики», строка «Начала Математический анализ» [3].

Эта рабочая программа рассчитана на 175 часов, 5 часов в неделю. Существует 7 тематических тестов: «Рациональные уравнения и неравенства», «Степень корня», «Степень положительного числа», «Экспоненциальные и логарифмические уравнения и неравенства», «Тангенциальный и кокасательный угол», «Тригонометрические функции численного аргумента», «Тригонометрические уравнения и неравенства» и окончательная работа по контролю.

Элементы теории вероятностей являются новым содержанием в ходе средней школы математики. Для управления усвоением материала в этом разделе используются задания из учебника. При организации повторения курса алгебры для 10–го класса внимание будет обращено на самые трудные темы, и будут использоваться задачи из раздела «Проблемы повторения».

Форма промежуточной и итоговой аттестации:

- контрольная работа;
- независимая работа;
- контрольная работа.

Окончательное повторение завершается контрольной работой [21].

Понятие мощности с рациональным показателем, свойства мощности с рациональным показателем. Понятие предела последовательности. Теоремы о границах последовательностей. Существование предела монотонно и ограничено. Строки, бесконечная геометрическая прогрессия и ее сумма. Число е. Понятие степени с иррациональным показателем. Преобразование выражений, содержащих возведение в степень. Экспоненциальная функция, ее свойства и граф.

Диагностика образовательных результатов студентов носит переменный и многомерный характер. Качество образования анализируется и оценивается педагогической командой с педагогической, психологической, концептуальной и социальной позицией.

Наиболее важные результаты преподавания математики в 10–11 классах для этой СМК включают следующее:

в направлении личностного развития

• развитие логического и критического мышления, речевой культуры, умственного эксперимента;

• формирование интеллектуальной честности и объективности среди студентов, умение преодолевать психические стереотипы, вытекающие из повседневного опыта;

• воспитание личностных качеств, обеспечивающих социальную мобильность, способность принимать самостоятельные решения;

• формирование качеств мышления, необходимых для адаптации в современном информационном обществе;

• развитие интереса к математическому творчеству и математическим способностям;

в метапредметном направлении

• формирование идей о математике как части всеобщей человеческой культуры, важности математики в развитии цивилизации и современного общества;

• развитие идей о математике как форме описания и способа познания реальности, создание условий для получения первоначального опыта математического моделирования;

• формирование общих методов интеллектуальной деятельности, характерных для математики, и лежащих в основе когнитивной культуры, значимой для различных сфер человеческой деятельности;

в предметном направлении

- владение математическими знаниями и навыками, необходимыми для продолжения образования в высших учебных заведениях или других общеобразовательных учреждениях, изучение соответствующих дисциплин, применение в повседневной жизни;
- создание основы для математического развития, формирования механизмов мышления, характерных для математической деятельности [19].

В результате изучения математики на профильном уровне и старшей школы ученик должен:

знать/понимать:

важность математической науки для решения проблем, возникающих в теории и практике; широту и в то же время ограниченное применение математических методов для анализа и изучения процессов и явлений в природе и обществе;

• важность практики и вопросов, возникающих в самой математике, для формирования и развития математической науки; история развития концепции числа, создание математического анализа, появление и развитие геометрии;

• универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость во всех областях человеческой деятельности;

• вероятностный характер различных процессов окружающего мира.

Изучение этой главы начинается с повторения алгебры основной школы: систематизирована информация о рациональных числах, студенты повторяют тему «Геометрическая прогрессия» и знакомится с бесконечно уменьшающейся геометрической прогрессией. Этот материал носит вспомогательный характер, так как с его помощью формируется представление предела последовательности, что впоследствии позволяет ввести определение степени с реальным показателем [17].

Среди свойств мощности с реальным показателем для дальнейшего изучения курса важны следующие: теорема о сопоставлении степеней с одним и тем же базисом, больше единицы, и следствия этой теоремы.

Используя теорему, студенты сначала сравнивают степени и в будущем решают экспоненциальные неравенства и уравнения, изучают функции степеней с одним и тем же базисом, более одного и следствия этой теоремы.

Изучая главу в классах социально–экономических и универсальных профилей профиля, мы обращаем внимание на то, что мы учим детей применять свойства степени с рациональным показателем в вычислениях и преобразованиях выражений [27].

В зависимости от выбора учеников классов имеет смысл рассмотреть простые задачи для применения понятия предела последовательности и упражнений по использованию свойств арифметического корня естественной степени.

Напомним, что такое множество рациональных чисел.

$Q\left\{\pm\frac{8}{3}, \pm 17, \pm\frac{8}{5}, \dots \frac{m}{n}, m \in Z, n \in N\right\}$ – рациональные числа.

Каждая дробь может быть представлена в десятичном виде, например $\frac{8}{3}$:

$\frac{8}{3} = 2,(6)$

-8	3	
6	2	,666…
2	0	
1	8	
	2	0

$$\frac{7}{5} = 1{,}4(0)$$

Итак, рациональное число может быть представлено как бесконечная десятичная дробь с периодом.

Напомним определение: для $m \in N, n \in N, n > 1$ выполняется равенство:

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a \geq 0$

$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, a > 0$

Например:

$$125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[8]{125} = 5;$$

$$125^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[8]{125}} = \frac{1}{5};$$

$$125^{0,(3)} = 125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$$

(нужно перевести бесконечную периодическую дробь в обыкновенную).

Перейдем к решению типовых задач.

Пример 1 – имеет ли смысл выражение:

а) $(-5)^{\frac{1}{7}}$

Ответ: нет.

б) $5^{\frac{1}{7}}$

Ответ: да ($5^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{5}$).

в) $(-2)^{-4}$

Ответ: да, т. к. –4 – целое число ($(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$).

г) $0^{-\frac{1}{2}}$

Ответ: нет.

Пример 2 – вычислить:

$(6^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} + (0{,}25)^{-1}(-0{,}5)^3$

Рассмотрим слагаемые отдельно:

$(6^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} = 6^{\frac{4}{3}*\frac{3}{2}} = 6^2 = 36$

$(0{,}25)^{-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4$

$(-0{,}5)^3 = (-\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8}$.

Получаем:

$36 - 4 * \frac{1}{8} = 35{,}5$.

Пример 3 – упростить выражение:

$$\frac{a^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{5}{3}}a^{-\frac{2}{3}}}$$

Упростим знаменатель:

$\frac{a^{\frac{3}{5}}}{a} = a^{\frac{3}{5}-1} = a^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$.

Отметим, что обязательно в данном случае $a > 0$.

Пример 4 – упростить выражение:

$(1 + c^{\frac{1}{2}})^2 - 2c^{\frac{1}{2}}$

Возводим в квадрат двучлен:

$(1 + c^{\frac{1}{2}})^2 = 1 + 2 * c^{\frac{1}{2}} + (c^{\frac{1}{2}})^2$=1+2$(c^{\frac{1}{2}})^2 + c$.

Получили выражение:

$1 + 2c^{\frac{1}{2}} + c - 2c^{\frac{1}{2}} = 1 + c$.

В данной задаче могут быть поставлены дополнительные вопросы, например, допустимы ли отрицательные значения с. Ответ: нет, т. к. с имеет рациональный показатель степени и по определению является неотрицательным.

Пример 5 – упростить выражение:

$$\frac{(x^{-\frac{1}{2}})^2 x^{\frac{6}{7}}}{(x^{\frac{2}{7}})^{-4}} = \frac{x * x^{\frac{6}{7}}}{x^{\frac{-8}{7}}} = \frac{x^{1\frac{6}{7}}}{x^{\frac{-8}{7}}} = \frac{x^{\frac{13}{7}}}{x^{\frac{-8}{7}}} = x^{\frac{13}{7}+\frac{8}{7}} = x^{\frac{21}{7}} = x^3, x > 0$$

Комментарий: ограничение на х наложено в связи с тем, что он имеет отрицательный рациональный показатель степени.

Итак, мы рассмотрели свойства степеней с рациональным показателем.

1.4 Основные свойства решения степени с рациональным показателем

Степень с дробным показателем мы определяли, распространяя на нее свойства степени с целым показателем. Иными словами, степени с дробными показателями обладают теми же свойствами, что и степени с целыми показателями. А именно:

1. свойство произведения степеней с одинаковыми основаниями $a^{\frac{m_1}{n_1}} a^{\frac{m_2}{n_2}} = a^{\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n2}}$ при a>0, а если $\frac{m_1}{n_1} > 0$ и $\frac{m_2}{n2} > 0$, то при a≥0;

2. свойство частного степеней с одинаковыми основаниями $a^{\frac{m_1}{n_1}} : a^{\frac{m_2}{n_2}} = a^{\frac{m_1}{n_1}-\frac{m_2}{n2}}$ при a>0;

3. свойство произведения в дробной степени $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}$ при a>0 и b>0, а если $\frac{m_1}{n_1} > 0$ и $\frac{m_2}{n2} > 0$, то при a≥ и (или) b≥0;

4. свойство частного в дробной степени $(a : b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}}$ при a>0 и b>0, а если $\frac{m}{n} > 0$, то при a≥0 и b>0;

5. свойство степени в степени $(a^{\frac{m_1}{n_1}})^{\frac{m_2}{n_2}} = a^{\frac{m1 m2}{n1\, n2}}$ при a>0, а если $\frac{m_1}{n_1} > 0$ и $\frac{m_2}{n2} > 0$, то при a≥0;

6. свойство сравнения степеней с равными рациональными показателями: для любых положительных чисел a и b, $a<b$ и рациональном p при $p>0$ справедливо неравенство $a^p<b^p$, а при $p<0$ – неравенство $a^p>b^p$;

7. свойство сравнения степеней с рациональными показателями и равными основаниями: для рациональных чисел p и q, $p>q$ при $0<a<1$ выполняется неравенство $a^p<a^q$, а при $a>0$ – неравенство $a^p>a^q$.

Доказательство свойств степеней с дробными показателями базируется на определении степени с дробным показателем, на свойствах арифметического корня n–ой степени и на свойствах степени с целым показателем. Приведем доказательства.

По определению степени с дробным показателем $a^{\frac{m_1}{n_1}} = \sqrt[n_1]{a^{m_1}}$ и $a^{\frac{m_2}{n2}} = \sqrt[n_2]{a^{m_2}}$, тогда $a^{\frac{m_1}{n_1}} a^{\frac{m_2}{n_2}} = \sqrt[n_1]{a^{m_1}} \sqrt[n_2]{a^{m_2}}$.

Свойства арифметического корня позволяют нам записать следующие равенства $\sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 n_2}} \sqrt[n_2 n_1]{a^{m_2 n_1}} = \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 n_2} a^{m_2 n_1}}$.

Дальше, используя свойство степени с целым показателем, получаем $\sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 n_2} a^{m_2 n_1}} = \sqrt[n_2 n_2]{a^{m_1 n_2 + m_2 n_1}}$, откуда по определению степени с дробным показателем имеем $\sqrt[n_2 n_2]{a^{m_1 n_2 + m_2 n_1}} = a^{\frac{m_1 n_2 + m_2 n_2}{n_1 n_2}}$, а показатель полученной степени можно преобразовать так:

$\frac{m_1 n_2 + m_2 n_2}{n_1 n_2} = \frac{m_1 n_2}{n_1 n_2} + \frac{m_2 n_1}{n_1 n_2} = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}$. На этом доказательство завершено.

Абсолютно аналогично доказывается второе свойство степеней с дробными показателями:

$$a^{\frac{m_1}{n_1}} : a^{\frac{m_2}{n_2}} = \sqrt[n_1]{a^{m_1}} : \sqrt[n_2]{a^{m_2}} =$$

$$\sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 n_2}} : \sqrt[n_2 n_1]{a^{m_2 n_1}} =$$

$$\sqrt[n_1 n_2]{a^{m_2 n_1 - m_2 n_1}} =$$

$$\sqrt[n_1 n_2]{a^{m_2 n_1} : a^{m_2 n_1}} =$$

$$a^{\frac{m_2 n_1 - m_2 n_1}{n_1 n_2}} =$$

$$a^{\frac{m_1 n_2}{n_1 n_2} - \frac{m_2 n_1}{n_1 n_2}}.$$

По схожим принципам доказываются и остальные равенства:

$$(ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}};$$

$$(a:b)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a:b)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}};$$

$$\left(a^{\frac{m_1}{n_1}}\right)^{\frac{m_2}{n_2}} =$$

$$= \sqrt[n_2]{\left(a^{\frac{m_1}{n_1}}\right)^{m_2}} = \sqrt[n_2]{(\sqrt[n_2]{a^{m_1}})^{m_2}} = \sqrt[n_2]{\sqrt[n_2]{(a^{m_1})^{m_2}}} = \sqrt[n_2]{\sqrt[n_2]{a^{m_1 m_2}}} = \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 m_2}} =$$

$$= a^{\frac{m1m2}{n2\,n1}} = a^{\frac{m1}{n2}} a^{\frac{m2}{n1}}$$

Переходим к доказательству следующего свойства. Докажем, что для любых положительных a и b, $a<b$ и рациональном p при $p>0$ справедливо неравенство $a^p<b^p$, а при $p<0$ – неравенство $a^p>b^p$. Запишем рациональное число p как m/n, где m – целое число, а – натуральное. Условиям $p<0$ и $p>0$ в этом случае будут эквивалентны условия $m<0$ и $m>0$ соответственно. При $m>0$ и $a<b$ по свойству степени с целым положительным показателем должно выполняться неравенство $a^m<b^m$. Из этого неравенства по свойству корней имеем $\sqrt[n]{a^m} < \sqrt[n]{b^m}$, а так как a и b – положительные числа, то на основе определения степени с дробным показателем полученное неравенство можно переписать как $a^{\frac{m}{n}} < b^{\frac{m}{n}}$, то есть, $a^p<b^p$.

Аналогично, при $m<0$ имеем $a^m>b^m$, откуда $\sqrt[n]{a^m} > \sqrt[n]{b^m}$, то есть, $a^{\frac{m}{n}} < b^{\frac{m}{n}}$ и $a^p>b^p$.

Осталось доказать последнее из перечисленных свойств. Докажем, что для рациональных чисел p и q, p>q при $0<a<1$ выполняется неравенство $a^p<a^q$, а при $a>0$ – неравенство $a^p>a^q$. Мы всегда можем привести к общему знаменателю рациональные числа p и q, пусть при этом мы получим обыкновенные дроби $\frac{m_1}{n}$ и $\frac{m_2}{n}$, где m_1 и m_2 – целые числа, а n – натуральное. При этом условию $p>q$ будет соответствовать условие $m_1>m_2$, что следует из <u>правила сравнения обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями</u>. Тогда по свойству сравнения степеней с одинаковыми основаниями и натуральными показателями при $0<a<1$ должно быть справедливо неравенство $a^{m}{}_{1}<a^{m}{}_{2}$, а при $a>1$ – неравенство $a^{m}{}_{1}>a^{m}{}_{2}$. Эти неравенства по свойствам корней можно переписать соответственно как $\sqrt[n]{a^{m1}} < \sqrt[n]{a^{m1}}$ и $\sqrt[n]{a^{m1}} > \sqrt[n]{a^{m1}}$. А определение степени с рациональным показателем позволяет перейти к неравенствам $a^{\frac{m1}{n}} < a^{\frac{m2}{n}}$ и $a^{\frac{m1}{n}} > a^{\frac{m2}{n}}$ соответственно. Отсюда делаем окончательный вывод: при $p>q$ и $0<a<1$ выполняется неравенство $a^p<a^q$, а при $a>0$– неравенство $a^p>a^q$.

2 Методика изучения степени с рациональным показателем в профильных классах

2.1 Методика формирования у учащихся решать задания по теме: «степень с рациональным показателем» в профильных классах

Для некоторых значений α степенная функция допускает продолжение на более широкую область определения, чем $R_{>0}$. Например, при $\alpha = n \in N$ на $R_{<0}$, кроме этого $0^n = 0$; если же $\alpha = -n$, где $n \in N$, то только на $R_{<0}$.

При α>0 можно доказать, что $\lim x^\alpha$ =0 при $\alpha \to 0_+$, поэтому, чтобы не нарушалась непрерывность функции $y = x^a$, и в этомслучае полагают, что $0^\alpha = 0$.

При нечетном $n \in N$ и $\alpha = \frac{1}{n}$ функция $y = x^a$ допускает естественное продолжение на всю числовую прямую; при четном n – это невозможно.

Равенство $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$ по сути задает функцию $y = x^{\frac{1}{n}}$ как функцию, обратную функции $y = x^a$, поэтому функцию $y = x^{\frac{10}{3}}$, например, можно считать определенной для всех $x \in R$, а функцию $y = x^{\frac{3}{10}}$ только для неотрицательных x.

В общем виде на α не накладывается никакие условия, поэтому функция $y = x^a$ считается определенной на множестве $(0;+\infty)$.

При изучении степенной функции в школьном курсе математики подходят совсем с других позиций: постепенно расширяются значения числа α, причем рассматриваются не функции, например, $y = x^a$, $n \in N$, а вводится понятие степени определенного вида.

Получаем следующую последовательность: степень с натуральным показателем (7 класс) – степень с нулевым и целым отрицательным показателем (7 класс) – степень с рациональным нецелым показателем (11 класс) – степень с иррациональным показателем (11 класс).

Основным мотивом введения показателей является выполнение свойств степеней.

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^{m+n}$$

$$\alpha^m : \alpha^n = \alpha^{m-n}$$

$$\left(\alpha^m\right)^n = \alpha^{n \cdot m}$$

$$\left(\alpha b\right)^n = \alpha^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{\alpha}{b}\right)^n = \frac{\alpha^n}{b^n},\ b \neq 0.$$

Такое рассмотрение приводит к ограничениям на a и b. Подход достаточно естественный и мотивированный, но только до момента рассмотрения степени с рациональным показателем.

Введению степени с рациональным показателем в школьном курсе математики предшествует рассмотрение действий с корнями. Уже на этом этапе проявляются разногласия автором различных учебников и учебных пособий по математике. Большинство из них определяют корень n – ой степени из положительного числа a для всех $n \in N$ (например, «Математика в понятиях, определениях и терминах» из серии «библиотека учителя математики», учебники по математике К.О. Ананченко и др.). Авторы же учебного пособия по алгебре для 11 класса дают следующее определение.

Пусть k – целое число, n – натуральное число, не равное 1. Степенью положительного числа α с рациональным показателем $\frac{k}{n}$ называется положительный корень n – ой степени из числа α^k.

$$\alpha^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{\alpha^k}, \alpha > 0; 0^{\frac{k}{n}} = 0, \frac{k}{n} > 0.$$

Такие разногласия вряд ли желательны, поэтому учителю приходится объяснять, что при n=1 получаем равенство.

Некоторые задания авторов данного учебного пособия сформулированы, с нашей точки зрения, некорректно. Запишите корни в виде степени с рациональным показателем: $\sqrt{x^5}$, $\sqrt[5]{x^4}$, $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[7]{c^{-3}}$.

Выполнить это задание можно только для первого примера, во всех остальных случаях выражения имеют смысл при всех значениях переменных (в последнем примере $c \neq 0$), переход от корней к степеням с рациональным показателем сужает область значений, при которых выражения имеют смысл.

Вычислите 8) $(-64)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{-0.5}$, так как выражение $(-64)^{-\frac{2}{3}}$ не имеет смысла.

Возникает также правомерный вопрос: почему степень с рациональным нецелым показателем определяется только для положительного числа α. Возникает мысль, что можно было бы разделить рациональные не целые показатели $\frac{p}{q}$ на две группы: р – целое число, q – натуральное нечетное число и вторая группа – р – целое число, q – натуральное нечетное число, и получить различные ограничения на переменную α, например, $\alpha^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha}$, где $\alpha \geq 0$, но $\alpha^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\alpha}$, где не понятно, почему $\alpha \geq 0$.

Учащимся можно пояснить, что без ограничения $\alpha \geq 0$ невозможно бы провести цепочку преобразований, например, следующих:

$$\sqrt[3]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{\alpha^2}.$$

Такие пояснения делают для учащихся более понятным, почему при рассмотрении степени с рациональным нецелым показателем основание должно быть положительным, и при каком показателе основание может быть равным нулю. Хорошо бы также привести и графическую иллюстрацию, показать, что область определения функции $y = \sqrt[3]{x}$ – вся числовая прямая, область определения функции $y = x^{\frac{1}{3}}$ – множество неотрицательных чисел.

Имеет ли смысл выражение: $(-27)^{\frac{2}{3}}$, $0^{\frac{3}{4}}$, $0^{-\frac{4}{5}}$, $(-64)^{-\frac{4}{3}}$ и так далее.

Полезно использовать при доказательстве свойств степени с рациональным показателем таблицу «Степени и корни» авторов М.Г. Шраера, В.С. Дувановой «Таблицы по алгебре и началам анализа, 11 классс». Для удобства ссылок в таблице слева помещены свойства арифметических корней, что делает доказательство для учащихся более простым.

Заметим, что свойство 6 степеней с рациональным показателем (при $0 < \alpha < b$, $\alpha^r < b^r$, при r>0; $\alpha^r > b^r$, при r<0) можно в дальнейшем трактовать как возрастание степенной функции $y = x^r$ на промежутке $(0;+\infty)$ при r>0 и ее убывание на этом же промежутке при r<0.

Таким образом, суммируя, можно отметить, что изучение степенной функции является одной из самых сложных проблем в дидактике математики.

При построении методологии изучения вопросов, связанных с энергетической функцией, целесообразно направить учебную деятельность на освоение общих методов действий.

Необходимо выявить происхождение введенных понятий с точки зрения теоретического знания основ математики.

Изучение учебного материала полезно, опираясь на принцип значимого обобщения, и в то же время формировать образовательную деятельность как научно–теоретическую с самого начала.

Подготовка к изучению экспоненциальной функции содержит достаточно большой материал, который рассматривается с пятого по десятый класс и проходит в несколько этапов. Это объясняется следующими причинами.

1). Обучение в определенной степени повторяет исторический путь человеческих открытий в целом: это исторический подход к обучению. Образцы истории развития математических знаний включают его появление, углубление, расширение, обобщение с течением времени.

2). С психологической точки зрения понимание и ассимиляция математического материала проходят через этапы:

а) фрагментарное понимание и ассимиляция;

б) логическое понимание и ассимиляция;

в) логически обобщенное понимание и ассимиляция.

Поэтому программа также включает три этапа концепции экспоненциальной функции:

1. Пропедевтический курс (5–6 кл.): возведение в степень с натуральным показателем.

2. Изучение основного содержания: определение степени с натуральным и целым показателем, свойства степеней, действия со степенями (7–9 кл.).

3. Углубление, обобщение и систематизация знаний о степени; степень с любым действительным показателем; преобразование выражений, содержащих степени; определение показательной функции; решение показательных уравнений и неравенств (10–11 кл.).

Одна из основных целей последнего этапа – привести в систему и обобщить имеющиеся у учащихся сведения о степенях, ввести понятие степени с любым действительным показателем. В зависимости от реальной подготовки класса эти уроки разрабатываются либо как уроки повторения, либо как уроки изучения нового материала. Целесообразно иметь таблицу (рисунок 2).

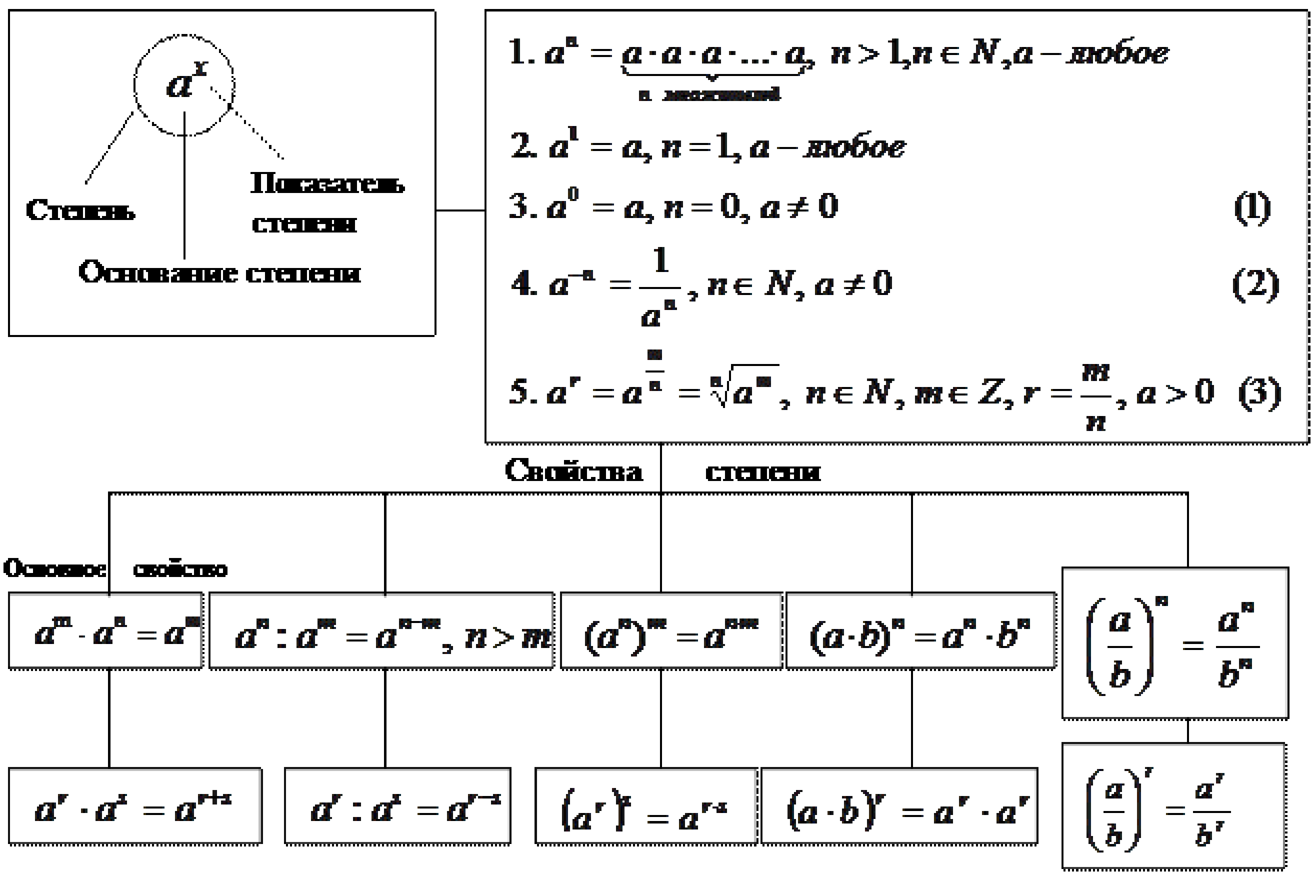


Рис. 2 – Сведения о степенях

За обозначением a^x для учащихся скрывается пять разных определений. Что общего в этих определениях, почему эти разные определения дают единую картину изменения функции?

Имеет место следующий факт:

1. Различные определения сочетаются с общими обозначениями.

2. Оказывается, полученная функция описывает множество процессов.

Прояснение этих фактов поможет пересмотреть вопрос об определении степени с разными показателями и ввести степень с любым реальным показателем. Этот материал изучается в 10 классе.

Все свойства степеней имеют место, когда выполняются условия (ограничения), при которых действует соответствующее определение степени.

При обобщении понятия степени необходимо ввести в систему знания, накопленные за несколько лет (5–9 клеток).

Когда материал повторяется, необходимо обратить внимание учащихся на главное, что важно для обобщения понятия степени.

1) Восстановить в памяти и полностью довести до понимания, что a^x есть сокращенная запись, и поэтому символ a^n имеет смысл при натуральном n. Поэтому правила действий могут применяться лишь тогда, когда не только компоненты, но и результат действия оказывается степенью с натуральным показателем, так как $a^x : a^n$ пока не выполнимо по правилу деления степеней.

2) Следует ограничиться повторением основного свойства степени и следствий, вытекающих из него; обратить внимание, при каких значениях букв правила действий со степенями могут применяться.

$$a^m * a^n = a^{m+n}, \forall a, \forall m, n - (n, m \in N).$$
$$a^m : a^n = a^{m-n}, \forall a, \forall m, n - (n, m \in N).$$
$$(a^m)^n = a^{mn}, \forall am, n.$$

3) Основной вопрос содержания этой темы: какой смысл следует придать (вложить) в новые символы $a^0, a^{-n}, a^{\frac{m}{n}}, a^a$, т.е как определить их, сохранить неизменными старые правила действий, сделав ненужными ограничения, которые

вытекали из первоначального определения степени с натуральным показателем и обратить внимание на новые ограничения.

4) Нужно, чтобы определения понятий $a^0, a^{-n}, a^{\frac{m}{n}}, a^a$ были даны не формально, не в виде немотивированных формулировок, а был бы вскрыт ход мысли, который побудил принять именно такие определения (новое определение). Все определения степени (1), (2), (3) (рис. 1) являются определениями – условными соглашениями. Задача учителя состоит в том, чтобы показать целесообразность соответствующего соглашения.

3. Примерная схема рассуждений, относящихся к методике уроков систематизации и обобщения сведений о степенях

3.1. Какой смысл следует придать выражению a^0, как определить его, чтобы правило умножения степеней осталось в силе?

Умножим по этому правилу a^0 на a^m, (вопреки запрету: показатели должны быть натуральными).

$$a^0 * a^m = a^{0+m} = a^m.$$

При $a^m \neq 0$, т.е. $a \neq 0$ произведение двух сомножителей a^0 и a^m может равняться одному из них (a^m) тогда и только тогда, когда другой сомножитель (a^0) равен 1.

Значит известное правило умножения степеней сохраняется лишь в том случае, если при любом $a \neq 0$ выражение a^0 будем считать равным 1.

<u>Определение.</u> $a^0 = 1, a \neq 0$

Теперь правило a^m: a^x=a^{m-x} может применяться и для m=n, так как a^0 имеет смысл. Следует отметить, что результат деления a^x на a^x в форме a^0 полностью согласуется с результатом арифметики a^m: $a^x = 1$.

3.2. Какой смысл придать выражениям 2^{-1}, 3^{-2}, $(\frac{1}{2})^{-5}$ и т.д. a^{-n}, где$n \in N$.? Имеют ли смысл эти выражения?

Определяя степень с целым отрицательным показателем, следует учесть:

1. Натуральное число – есть частный случай целого числа, а потому степень с натуральным показателем является частным случаем степени с целым показателем.

2. Нужно позаботиться о том, чтобы новое определение не противоречило степени с натуральным показателем: должно быть так, чтобы выражение $2^{-(-3)}$ означало ничто иное, как 2^3.

3. Определить степень с отрицательным показателем так, чтобы сохранилось основное свойство степени и следствия из него.

Итак, остается в силе $a^m * a^n = a^{m+n}$, когда m и n какие угодно отрицательные числа. Пусть m=–n, тогда $a^{-n} * a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1, a \neq 0$. Произведение двух целых чисел равно единице тогда и только тогда, когда сомножители – взаимно обратные числа, т.е. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Значит основное свойство степени сохранится лишь в том случае, если при любом $a \neq 0$ выражение a^{-n} будет считаться равным $\frac{1}{a^n}$.

<u>Определение.</u> $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$

$$\frac{1}{5} = 5^{-1}, \frac{1}{81} = \frac{1}{3^4}$$

Записанные равенства при необходимости используют справа налево,

например,

Появляются важные тождества

$$(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{n})^n; (\frac{1}{a})^{-n} = a^n, a \neq 0.$$

Итак, формулы (1) и (2) принимают за определение степени с нулевым и отрицательным показателем. При такой договоренности все другие свойства сохраняются, кроме случая $0^n = 0, n \in N$, но для $a = 0$ и $n < 0$ символ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ теряет смысл. Такой принцип построения в науке называют принципом *перманентности* – (permanere – остаться, сохраняться), сохранение основных формальных законов действий).

В несовершенной форме этот принцип сформулировал в 1830 г. английский математик Дж. Пикок.

Полностью и четко установил его немецкий математик Г. Генкель в 1867 г..

Принцип перманентности соблюдается и при обобщении понятия числа; при определении общего понятия равенства фигур и др. (Вспомните реализацию этого принципа из лекций «Изучение числовых множеств», «Преобразование фигур в школьном курсе геометрии»).

$$2^3 = 2*2*2 = 8;\ 2^{-(-3)} = \frac{1}{2^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{2^3}} = 2$$

Действительно,

3.3. Дальнейшим этапом систематизации сведений о степенях является распространение понятия степени на случай рациональных показателей.

Какой смысл можно придать символам $2^{\frac{3}{5}}$?

Снова предъявим требования к определению степени $a^{\frac{m}{n}}$, где $n \in N, m \in N$.

1) Попробуем определить степень с рациональным показателем $a^{\frac{m}{n}}$ $=a^y$ так, чтобы сохранилось основное свойство степени.

2) Заметим, что число a^y должно быть положительным. В самом деле

$a^r = a^{\frac{r}{2}*2} = (a^{\frac{r}{2}})^2 > 0$, т.е. $a^r > 0$

3) Должна быть определена степень a^{-r}, т.к.

$$a^{-r} = a^{r(-1)} = (a^r)^{-1}$$

4) Каким должно быть а>0,

$$a(a^r)^{\frac{1}{r}} = a^{\frac{1}{r}r} = a^1 = a > 0$$

Вывод: Степень a^r определяется только при положительном основании a и сама степень a^r также является положительным числом r – любое рациональное число).

Итак, мы получили те ограничения, которые нужно ввести при определении степени с рациональным показателем.

Но как получить (построить) само определение степени a^r?

Представляет интерес идея математика и методиста И.В. Арнольда, который предлагает рассматривать показатель степени как *оператор.*

Идея Арнольда может быть применена на практике, если рассматривать параллельно действия умножения и возведения в степень.

<u>При умножении</u>: множитель – оператор, показывает, на сколько слагаемых надо разбить множимое и сколько их взять.

6*6=6+6

$$6*\frac{1}{3} = 2; 6 = 2 + 2 + 1$$

$$6*\frac{2}{3} = 2 + 2 = 4; 6 = 2 + 2 +$$

<u>При возведении в степень</u>: показатель степени – *оператор*, показывает, на сколько множителей надо разбить основание степени и сколько их взять.

$$8^2 = 8 * 8$$

$$8*\frac{1}{3} = 2; 8 = 2*2*2$$

$$8*\frac{2}{3} = 2 * 2 = 4; 8 = 2*2*2$$

От этих рассуждений не трудно перейти к общим

$$a \cdot \frac{m}{n} = \underbrace{k + k + \ldots + k}_{m \text{ слагаемых}}, \quad a = \underbrace{k + k + \ldots + k}_{n \text{ слагаемых}} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \underbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{m \text{ сомножителей}}, \quad a = \underbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{n \text{ сомножителей}}$$

Итак, возвести число a в степень $\frac{m}{n}$ с дробным показателем, значит: разбить это число a на n равных сомножителей и перемножить m таких сомножителей.

Схематически обозначается так:

$$a^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a} = b$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = b^m$$

Обобщая вышесказанное, приходим к определению $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Эта идея – IV. Арнольд не был разработан в школьных учебниках, но ознакомление с этим подходом к определению понятия «степень с рациональным показателем» может вызвать интерес учащихся.

В существующих учебниках существует еще один подход к получению схематического определения степени с рациональным показателем.

Мы исходим из конкретных примеров.

Пусть $2^{\frac{1}{2}} = x$. Сохраняя основное свойство степени, запишем:

а) $2^{\frac{1}{2}} * 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$ (по ранее известному определению).

С другой стороны:

$2^{\frac{1}{2}} > 0,\ 2^{\frac{1}{2}} * 2^{\frac{1}{2}} = (2^{\frac{1}{2}})2 = x^2.$

Итак, $x^2 = 2 \rightarrow 2 = \sqrt{2}$ (по определению арифметического кв. корня). Получим. $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

б) Пусть $2^{\frac{2}{3}} = x;\ 2^{\frac{2}{3}} * 2^{\frac{2}{3}} * 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2.$

С другой стороны $x^3 = 2^2 \leftrightarrow x\sqrt[3]{2^2}.$

Получим $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}.$

Обобщая эти примеры, можно схематически записать:

(*) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \frac{m}{n} - \text{дробь}, m - \text{целое}, n - \text{натуральное}.$

Формулу принимаем за определение степени с рациональным показателем. Еще раз подчеркнем, что основание степени $a > 0$.

Замечание

$$0^{\frac{m}{n}} = 0, \text{если } \frac{m}{n} - \text{дробь}, \frac{m}{n} > 0, n \in N, m \in Z.$$

$$(-2)^{\frac{3}{4}}, (-8)^{-\frac{1}{5}}, 0^{-\frac{1}{2}} \text{ – не имеют смысла.}$$

Но принятое определение имеет один недостаток – рациональное число можно записать разными способами.

Возьмем рациональное число $\frac{1}{2}$. Это число можно записать бесконечным множеством способов. Однако этот недостаток определения в действительности является несущественным.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} \dots$$

Значит $a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{3}{6}} = \dots = \sqrt{a} = \sqrt[4]{a^2} = \sqrt[6]{a^3}$

Итак, определение математически корректно, т.е равенством (*) задает одно и то же число, независимо от того, как записано рациональное число r в виде дроби $\frac{m}{n}$.

Следовательно, мы принимаем соотношение (*) за определение степени с рациональным показателем, причем основание a всегда считается положительным.

Введенное определение оказалось удачным, так как в нем сохранились все привычные свойства степеней, которые были доказаны для натуральных показателей.

На практике предпочитают заменять радикалы степенями с дробными показателями.

$$\sqrt[8]{x^3} = \sqrt[12]{x^{11}} = x^{\frac{3}{8}} * x^{\frac{11}{12}} = x^{\frac{3}{8}+\frac{11}{12}} = x^{\frac{9+22}{24}} = x^{\frac{31}{24}} = \sqrt[24]{x^{31}}$$

Вычислить:

1) $64^{\frac{1}{6}} = (2^6)^{\frac{1}{6}} = 2,\ 64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[2]{64} = 2$

2) $27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9,\ 27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^2)^2} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = 3^2 = 9$

3) $(-8)^{\frac{1}{3}}$

Это задание некорректно, так как нет определения степени с дробным показателем для отрицательного основания.

1) $(-8)^{\frac{1}{3}}$

не имеет смысла.

Еще раз проверим, не дает ли противоречий новое определение?

4) Возражения $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$?

Если согласиться с этим, то мы сталкиваемся с противоречиями.

$$-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2,$$

$$-2 = 2?$$

2) По определению степени с рациональным показателем получили:

$$a)\ 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt{2^4} = \sqrt{16} = 4, a\ 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4;$$

$$a')\ 2^{-\frac{4}{2}} = \sqrt{2^{-4}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}; a\ 2^{-\frac{4}{2}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}.$$

2.2 Методика формирования умений решать задания по теме: «Степень с рациональным показателем» в профильных классах

В процессе формирования умений у обучающихся решать выражения со степенью с рациональным показателем в профильных класса рекомендуется три этапа:

1. Подготовительный;

2. Формирование навыков для решения простых выражений:

3. Введение степени с рациональным показателем и создание других методов их решения.

Цель подготовительного этапа состоит в том, что необходимо сформировать способность учащихся использовать свойства степени.

Для реализации этого шага рекомендуется в процессе систематизации знаний учащихся о свойствах степени с рациональным показателем. Основной инструмент может служить задачам, предлагаемым обучаемым, и осуществляется под наблюдением учителя или самостоятельно, а также навыки в решении тригонометрических уравнений.

Для степени с рациональным показателем n:

$$a > 0, a^n > 0$$

$$a < 0 \begin{cases} n - \text{чётное}, a^n > 0 \\ n - \text{нечётное}, a^n < 0 \end{cases}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$(abc)^n = a^n b^n c^n$$

$$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(a^m)^n = a^{m*n}$$

$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Уравнения, содержащие неизвестную переменную в показателе степени, называются ***показательными уравнениями.***

При решении показательных уравнений используется условие равенства двух степеней: две степени равны тогда и только тогда, когда равны основания степеней и их показатели.

$$a_1^{x_1} = a_2^{x_2} \leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

Рассмотрим решение нескольких примеров:

1. $3^{5x-2} = 81^{x-1}$

В основе решения данного уравнения лежит условие равенства 2 степеней. Уравняем основания степеней:

$$3^{5x+2} = (3^4)^{x-1}$$

$$3^{5x+2} = 3^{4x-4}$$

$$5x + 2 = 4x - 4$$

$$x = -6$$

Ответ: – 6

2. $3^{x+1} + 2 * 3^{x+2} = 21$

Поскольку числовые коэффициенты для x равны, решение этого уравнения основано на разложении левой части на множители. Из скобки выводится общий множитель – степень с наименьшим индексом. Чтобы узнать, что осталось в скобке, вам нужно разделить каждую степень на общий множитель.

$$3^{x-1}(1 + 2 * 3) = 21$$

$$3^{x+1} * 7 = 21$$

$$3^{x+1} = 3$$

$$x + 1 = 1$$

$$x = 0$$

Ответ: 0.

3. $3^{2x} + 2 * 3^x - 3 = 0$

Так как числовые коэффициенты при x не равны, то в основе решения данного уравнения лежит введение новой переменной, позволяющей показательное уравнение заменить квадратным алгебраическим.

$$3^{2x} = (3^x)^2$$

$$(3^x)^2 - 2 * 3^x - 3 = 0$$

Пусть $3^x = t$

Тогда

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$t_1 = -1$$

$$t_2 = 3$$

Получили:

$$3^x = t_1$$

$3^x = -1$ – *не подходит, так как степень всегда положительна (a^x>0)*

$$3^x = t_2$$

$$3^x = 3$$

$$x = 1$$

Ответ: 1.

Определение. *Если a>0 и x– рациональное число, представленное дробью* $\frac{m}{n}$, *где m – целое, и n?2 – натуральное число, то:*$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ *; если a≠ 0 и x>0, то a^x≠ 0.*

Например, $a^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{a^2}$ при *a>0;*

$b^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{b^{-3}}$или $b^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{b^3}} = \frac{1}{b^{\frac{3}{4}}}$ при *b>0.*

Рациональное число представляется в виде дроби $\frac{m}{n}$ неоднозначно, так как

$$\frac{m * k}{n * k} = \frac{m}{n}$$

при любом натуральном *k*.

Покажем, что: $a^{\frac{m*k}{n*k}} = a^{\frac{m}{n}}$

В самом деле: $a^{\frac{m*k}{n*k}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

(использовано основное свойство арифметического корня).

Свойства функции с целым показателем распространяются на степень с любым рациональным показателем и положительным основанием, например:

$$a^p * a^q = a^{p+q} \ (a > 0)$$

Выражение a^n определено для всех a и n, кроме случая a=0 при n≤0. Напомним свойства таких степеней (с действительным показателем).

Для любых чисел a, b и любых целых чисел m и n справедливы равенства:

$$a^{m*n} = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \ (a \neq 0);$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \ (b \neq 0);$$

$$a^1 = a; a = 1 \ (a \neq 0).$$

Отметим также следующее *свойство:*

Если mn, то $a^m a^n$ при a^1 и a^{mn} при 0. В этом пункте мы обобщим понятие степени числа, придав смысле выражениям типа $2^{0.3}$, $8^{5/7}$, $4^{-1/2}$ и т. д. Естественно при этом дать определение так, чтобы степени с рациональными показателями обладали теми же свойствами (или хотя бы их частью), что и степени с целым показателем. Тогда, в частности, n–я степень числа $a'^{\frac{m}{n}}$ должна быть равна a^m. Действительно, если свойство

$(a^p)^q = a^{pq}$ выполняется, то

$$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n}*n} = a^m$$

Последнее равенство означает (по определению корня n–й степени), что число $a'^{\frac{m}{n}}$ должна быть корнем n–й степени из числа a^m.

Определение:

Степенью числа a_0 с рациональным показателем $r = \frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное (n 1), называется число $\sqrt[n]{a^m}$

Итак, по определению:

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\mathrm{a}^{\mathrm{m}}}$ (1)

Степень числа 0 определена только для положительных показателей; по определению $0^{\mathrm{r}}= 0$ для любого r^0.

Замечание 1.

Из определения степени с рациональным показателем сразу следует, что для любого положительного a и любого рационального r число a^{r} положительно.

Замечание 2.

Любое рациональное число допускает различные записи его в виде дроби, поскольку $\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$ для любого натурального k. Значение a^{r} также не зависит от формы записи рационального числа r. В самом деле, из свойств корней следует, что

$$a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Замечание3.

При a равнялось бы $\sqrt[3]{-8}$, т. е. — 2. Но, с другой стороны, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ и поэтому должно выполняться равенство:

$-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{8^2} = 2$.

Рассмотрим свойства степени с рациональным показателем, они аналогичны свойствам степени с натуральным показателем, здесь s и r – рациональные числа:

1. $a^s * a^r = a^{s+r}$

Для того чтобы умножить степени с одинаковым основанием, нужно сложить их показатели, основание оставить без изменений.

2. $\frac{a^s}{a^r} = a^{s-r}$ при ы $\geq r, a \neq 0$

Можно разделить степени с одинаковым основанием, для этого их показатели нужно вычесть, а основание оставить без изменений.

3. $(a^s)^r = a^{sr}$

Для того чтобы степень возвести в степень, нужно перемножить показатели степени, основание оставить без изменений.

4. $(ab)^s = a^s b^s$

При умножении степеней с одинаковым показателем, нужно перемножить основания и возвести результат в исходную степень.

5. $(\frac{a}{b})^s = \frac{a^s}{b^s}, b \neq 0$

Чтобы разделить степени с одинаковыми показателями, нужно разделить основания и возвести результат в исходную степень.

Вышеперечисленные свойства справедливы для любых рациональных показателей.

Докажем первое свойство:

6. $a^s * a^r = a^{s+r}$

Доказательство:

s и r – рациональные числа, $s = \frac{m}{n}, r = \frac{b}{q}, n$ и $q \in N; m$ и $b \ \in Z.$

7. $a^s * a^r = a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{b}{q}} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[q]{a^b}$

Приведем корни к одинаковому показателю:

$$\sqrt[n]{a^m}\sqrt[q]{a^b} = \sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[qn]{a^{nb}}$$

Преобразуем полученное выражение согласно свойствам корня:

$$\sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[qn]{a^{nb}} = \sqrt[nq]{a^{mq}a^{nb}} = \sqrt[nq]{a^{mq+nb}}$$

По определению степени с рациональным показателем:

$$\sqrt[nq]{a^{mq+nb}} = a^{\frac{mq+nb}{qn}}$$

Согласно свойствам степени:

$$a^{\frac{mq+nb}{qn}} = a^{(\frac{mq}{qn}+\frac{nb}{qn})} = a^{(\frac{m}{n}+\frac{b}{q})} = a^{s+r}$$

Итак, получили:

$$a^s * a^r = a^{s+r}$$

Докажем третье свойство:

$$(a^s)^r = a^{sr}$$

Доказательство:

s и r – рациональные числа, $s = \frac{m}{n}, r = \frac{b}{q}, n$ и $q \in N; m$ и $b \in Z.$

Схема доказательства стандартная: от степеней перейти к корням, выполнить преобразования с корнями и вернуться к степеням.

$$(a^s)^r = (a^s)^{\frac{b}{q}} = \sqrt[q]{(a^s)^b} = \sqrt[q]{(a^{\frac{m}{n}})^b} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^b} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mb}}} = \sqrt[nq]{a^{mb}} = a^{\frac{mb}{nq}} = a^{sr}$$

Остальные свойства доказываются аналогично.

Решение типовых задач

Перейдем к решению типовых задач.

Пример 1 – имеет ли смысл выражение:

а) $(-5)^{\frac{1}{7}}$

Ответ: нет.

б) $5^{\frac{1}{7}}$

Ответ: да $5^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{5}$

в) $(-2)^{-4}$

Ответ: да, т. к. –4 – целое число $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$

г) $0^{-\frac{1}{2}}$

Ответ: нет.

Пример 2 – вычислить:

$$(6^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} + (0{,}25)^{-1}(-0{,}5)^3$$

Рассмотрим слагаемые отдельно:

$$(6^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} = 6^{\frac{4}{3}*\frac{3}{2}} = 6^2 = 36$$

$$(0{,}25)^{-1} = (\frac{1}{4})^{-1} = 4$$

$$(-0{,}5)^3 = (-\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{(-2)^8} = \frac{1}{-8}$$

Получаем:

$$36 - 4 * \frac{1}{8} = 35{,}5$$

Пример 3 – упростить выражение:

$$\frac{a^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{5}{3}}a^{-\frac{2}{3}}}$$

Упростим знаменатель:

$$a^{\frac{5}{3}}a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{3}} = a$$

Получаем:

$$\frac{a^{\frac{3}{5}}}{a} = a^{\frac{3}{5}-1} = a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$$

Отметим, что обязательно в данном случае $a > 0$.

Пример 4 – упростить выражение:

$$(1 + c^{\frac{1}{2}})^2 - 2c^{\frac{1}{2}}$$

Возводим в квадрат двучлен:

$$(1 + c^{\frac{1}{2}})^2 = 1 + 2 * c^{\frac{1}{2}} + \left(c^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 1 + 2c^{\frac{1}{2}} + c.$$

Получили выражение:

$$1 + 2c^{\frac{1}{2}} + c - 2c^{\frac{1}{2}} = 1 + c$$

В данной задаче могут быть поставлены дополнительные вопросы, например, допустимы ли отрицательные значения с. Ответ: нет, т. к. с имеет рациональный показатель степени и по определению является неотрицательным.

Пример 5 – упростить выражение:

$$\frac{(x^{-\frac{1}{2}})^2x^{\frac{6}{7}}}{(x^{\frac{2}{7}})^{-4}} = \frac{x * x^{\frac{6}{7}}}{x^{-\frac{8}{7}}} = \frac{x^{1\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{8}{7}}} = \frac{x^{\frac{13}{7}}}{x^{-\frac{8}{7}}} = x^{\frac{13}{7}+\frac{8}{7}} = x^3, x > 0$$

Комментарий: ограничение на x наложено в связи с тем, что он имеет отрицательный рациональный показатель степени.

Итак, мы рассмотрели свойства степеней с рациональным показателем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В школьной программе большое внимание уделяется теме: «Степень», а так же «Степень с рациональным показателем». Это не секрет, что обучающиеся хорошо освоили концепцию «степень с целым показателем», свободно и непринуждённо работают с ней, вполне уверенно обращается с свойствами степени, уверенно решают выражение, на умения применять свойства степеней.

Опыт показывает, что недостатки с этой моделью, слишком поспешным введение степени с рациональным показателем, не позволяют создать прочную основу для успешного усвоения материала. В связи с этим, в нашей работе, мы подробно рассмотрели все особенности применения степени с рациональным показателем.

Все свойства и примеры заданий отражены в разработанном нами уроке изучения нового материала на тему «Степень с рациональным показателем. Свойства степени» для обучающихся 10–го класса.

В исследовании нами была рассмотрена также методика изучения степени с рациональным показателем, в курсе математики старшей школы в профильных классах. В результате разработаны еще один урок обобщения и систематизации знаний на тему «Степень с рациональным показателем» и система тренировочных упражнений по подготовке к ЕГЭ в профильных классах.

Нами были поставлены задачи:

- провести анализ учебной и методической литературы по проблеме исследования;
- выявить роль степени с рациональным показателем в обучении математики;
- разработать урок изучения нового материала на тему «Степень с рациональным показателем. Свойства степени» и урок обобщения и систематизации знаний на тему «Степень с рациональным показателем» для учеников 10–11 профильных классов.

Таким образом, все поставленные задачи были решены, и тем самым, цель достигнута. Данная работа может быть использована в учебном процессе учителями математики общеобразовательных школ, а также старшеклассниками при подготовке к ЕГЭ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Виленкин, Н. Я. Алгебра и математический анализ 10 класс. Учебник для углубленного изучения математики в общеобразовательных учреждениях, Издательство Мнемозина, 13–е изд. стереотипное, 2006. – 336с.

2. Гельфанд, И.М., Львовский С.М., Тоом А.Л. Тригонометрия, М.: МЦНМО, 2003.–7–16 с.

3. Захарова, И. Г. Информационные технологии в образовании: учебное пособие для студ. пед. учеб. заведений/ И. Г. Захарова,– М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 192 с.

4. Звавич, В.И., Пигарев Б.П. Степень с рациональным показателем (решение уравнений + варианты самостоятельных работ)//Математика в школе.№3, С.18–27.

5. Колмагорова, А. Н. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10–11 классов общеобразовательных учреждений, 17–е изд. – М.: Просвещение, 2008. – 384 с.

6. Королев, С.В. Степень с рациональным показателем на экзамене по математике, изд. Экзамен, 2006. – 254 с.

7. Макарычев, Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б. Тригонометрия. 10 класс, М.: Просвещение, 2008. – 61 с.

8. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала анализа.10–11 классы. Часть 1.Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень). – 10–е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 399 с.

9. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала анализа.10–11 классы. Часть 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень), – 10–е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 399 с.

10. Мордкович, А.Г. Беседа с учителями математики: Учеб.–метод.пособие.–2–е изд.,доп. и перераб.–М.:ООО «Издательский дом ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство Мир и Образование» 2005.–336с.

11. Мордкович, А.Г., И.М. Смирнова. Математика–10 (базовый уровень). – 8–е изд., стер. – М.: 2013. – 431 с.

12. Никольский, М.К. Алгебра и начала анализа: Учеб. Для 10 класса общеобразовательных учреждений. – 8–е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 430 с.8

13. Решетников, Н.Н. Степень с рациональным показателем: М. Педагогический университет «Первое сентября», 2006, лк 1.

14. Смоляков, А.Н., Севрюков П.Ф. Приемы решения степень с рациональным показателем //Математика в школе. 2004. №1. С.24–26.

15. Шабашова, О.В. Степень с рациональным покзателем //Математика в школе. 2004. №1. С.20–24.

16. Шахмейстер, А.Х. Тригонометрия. Изд. «МЦНМО, Петроглиф, Виктория плюс», 2009. – 752 с.

17. Просветов, Г.И. Степень с рациональным показателем. Задачи и решения, Альфа–Пресс, 2010. – 72 с.

18. Мордкович, А.Г. Беседы с учителем. М.: ООО "Издательский дом "ОНИКС 21 век":ООО "Издательство "Мир и Образование", 2005"

19. Мордкович, А.Г . Алгебра и начала анализа. 10–11 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2000. – 336с.

20. Мордкович, А.Г. Методические проблемы изучения степени с рациональным показателем в общеобразовательной школе // Математика в школе. 2002. №6.

21. Немов, Р.С. Психология: Учеб. для студ. высш. пед. учеб. заведений: В 3 кн–4–е изд. М.: Гумакнит. изд. центр ВЛАДОС, 2003.–Кн.1:Общие основы психологии.–688с.

22. Немов, Р.С. Психология: Учеб.для студ.высш.пед.учеб.заведений: В 3 кн. – 4е изд. М.:Гумакнит.изд.центр ВЛАДОС, 2003.–Кн.2: Общие основы психологии.–608с.

23. Орлова, Т. Решение уравнений: Конкурс "Я иду на урок" //Математика. Приложение к газете «Первое сентября» № 48, 1999г.

24. Пичурин, Л.Ф. О Степень с рациональным покзателем и не только о ней: М. Просвещение, 1985г.

25. Решетников, Н.Н. Степень с рациональным покзателем в школе: М. Педагогический университет «Первое сентября», 2006, лк 1.

26. Смоляков, А.Н., Севрюков П.Ф. Приемы решения уравнений //Математика в школе. 2004. № 1. С. 24–26.

27. Суворова, М.В. Повторительно–обобщающие уроки в курсе математики (на примере изучения темы «Степень с рациональным покзателем» //Математика в школе. 1995. № 4. С.12–13

28. Токарева, А. Степень с рациональным покзателем. // Математика. // Приложение к газете «Первое сентября» № 44, 2002 г.

29. Шабунин, М. Степень с рациональным покзателем. // Математика. Приложение к газете «Первое сентября» № 12,13, 1995г.

30. Филатов, В.Г. О потере корней при решении степени с рациональным покзателем //Математика в школе. 1991. №2. С.57–59.

31. Шабашова, О.В. Приемы отбора корней в тригонометрических уравнениях //Математика в школе. 2004. №1. С.20–24.

32. Якимовская, И.С. Знания и мышление школьников. М.: Просвещение, 1976.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Разработка урока математики в 10 классе

Урок по теме: «Степень с рациональным показателем. Свойства степеней».

Цели урока:

1. Закрепить понятие степени, развивать умение выполнять действия со степенями.
2. Добиваться четких ответов при решении примеров.
3. Воспитывать аккуратности ведения записей в тетради.

Ход урока

I. Организационный этап

Сообщение учителем темы и целей урока.

Ответственные ученики сообщают о готовности ребят к уроку.

фронтальная работа

Проверка наличия домашнего задания:

II. Этап проверки домашней работы

III. Повторительно–обобщающий этап

Устный опрос по изученной теме.

На партах – раздаточный материал для устного счета

Индивидуально–групповая работа в тетради

1. Вычислить:
2. а) $\sqrt[4]{11^4} = 11$
3. б) $7\sqrt[8]{(-3)}^8$ =7*3=21
4. в) $\sqrt[6]{64^2 = 4}$
5. г) $16^{\frac{5}{4}} = 32$
6. д) $243^{0,4}$=9

7. е) $8^{\sqrt{2}} : 2^{3\sqrt{2}} = 1$

8. ж) $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$.

9. Упростить выражения:

10. а) $\sqrt{a^2} = a$, где $a \geq 0$;

11. б) $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{-a}$, где а меньше 0;

12. в) $\sqrt[4]{a^4} = |a|$.

IV. Закрепление изученного материала (4 мин.)

Устная индивидуальная работа с раздаточным материалом:

опрос теории:

1. Какие числа называются натуральными?
2. Как может быть представлено любое рациональное число?
3. Из каких множеств состоит множество действительных чисел?
4. Сформулировать определение периодической дроби.
5. Сформулировать определение арифметического корня натуральной степени.
6. Сформулировать определение степени с рациональным показателем.

V. Рефлексивный этап – контроль за уровнем усвоения изученного материала

Проверочная работа на 13 мин.

I Вариант

1. Вычислить. $0{,}3\sqrt{10}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}$

1. 9,1
2. 2,9
3. 8,9
4. 89,9

2. Вычислить. $0{,}1\cdot\sqrt{20} : \sqrt{45} - 2\frac{17}{30}$

1. – 2,5
2. $\frac{2}{3}$

3. 2

4. –10

3. Упростить. $\sqrt[3]{8a^3}-(2a+\sqrt[4]{a^2в^8})$, если $a \geq 0$

1. $4a + в^2\sqrt{a}$

2. $в^2\sqrt{a}$

3. $1+\sqrt{aв^4}$

4. $-в^2$

13. Найти значение выражения $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2}+ав}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+в}}\right):\sqrt{\frac{a}{a+в}}$ при а=4, в=5

1. $\frac{2}{3}$

2. 2

3. 0

4. $2\sqrt{5}$

31. Вычислить $(0{,}001)^{\left(\frac{-1}{3}\right)}+2^{-2}\cdot 64^{\frac{-2}{3}}\cdot 4-8^{\frac{-4}{3}}+9^0\cdot 5$

39. Вычислить $3^{-4}\cdot 27^{\frac{-2}{3}}\cdot 9-27^{\frac{-4}{3}}+\left(9^0\right)^3\cdot 2+(0{,}125)^{\frac{-2}{3}}$

II Вариант.

4. Вычислить. $\frac{8\sqrt{5}}{0{,}4\sqrt{0{,}2}}$

1. 100

2. 91

3. 8,9

4. 4.

5. Вычислить. $-6\sqrt{\frac{1}{4}}+\frac{\sqrt{324}}{2}$

1. 0

2. $16^{\frac{2}{3}}$

3. –10

4. $\frac{2}{3}$

6. Найти значение выражения $\frac{a-в}{a+в+2\sqrt{aв}} \cdot \left(\sqrt{a}+\sqrt{в}\right)$, при а=4, в=9.

32. Вычислить $9^{\frac{-5}{2}}+10 \cdot \left(4^{0}\right)^{5}-\left(0,25\right)^{\frac{-3}{2}} \cdot 27 \cdot 3^{-5}$

40. Вычислить $0,001^{\frac{-1}{3}}+27^{\frac{-7}{3}}+\left(6^{0}\right)^{5} \cdot 2-3^{-4} \cdot 81^{\frac{-3}{2}} \cdot 27$

III Вариант.

7. Упростить выражение $\frac{\sqrt[3]{a^{6}в^{4}}}{\sqrt[3]{в}}-2a^{2}в$

1. $\sqrt[3]{в}$
2. $2a^{2}в$
3. $-a^{2}в$
4. $в$

8. Вычислить $\sqrt[6]{3^{7} \cdot 4^{5}} \cdot \sqrt[6]{3^{5} \cdot 4}$

1. 24
2. 36
3. 6
4. $\sqrt{3}$

9) Вычислить $\sqrt[4]{\left(-3\right)^{2} \cdot 2} \cdot \sqrt[4]{8 \cdot 9}$

1. $3\sqrt{2}$
2. $-3\sqrt{2}$
3. 6
4. –6

15. Найти значение выражения $\dfrac{a-в}{a^{\frac{1}{2}}-в^{\frac{1}{2}}-}-2\dfrac{в^{\frac{-1}{2}}}{в^{-1}}$, если а=9, в=16.

1. 1
2. 7
3. –7
4. –1.

33. Вычислить $64^{\frac{-5}{6}}-(0{,}125)^{\frac{-1}{3}}-32\cdot 2^{-4}\cdot 16^{\frac{-3}{2}}+(3)^{0^4}\cdot 4$

41. Вычислить $9^{\frac{-3}{2}}-(5)^{0^3}\cdot 3+(0{,}01)^{\frac{-1}{2}}-9\cdot 3^{-3}27^{\frac{2}{3}}$

VI. Работа в классе

№ 35.23; 37.8 – 37.10; 37.20.

VII. Итог урока

Домашнее задание: п. 33,35, 36, 37. № 37.21; 37.22; 37.23; 37.25.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Разработка урока математики в 11 классе.

Учебник: «Алгебра и начала анализа 10–11» А.Н.Колмогоров.

Тема урока: «Степень с рациональным показателем».

Цели урока:

Образовательные :

- ввести понятие степень с рациональным показателем;
- первичное закрепление полученных знаний на простейших заданиях.

Воспитательные : воспитание нравственных черт личности:

- целеустремлённости;
- настойчивости в достижении поставленной цели;
- самостоятельности, внимательности;

воспитание умения работать в коллективе.

Развивающие: развитие навыков

- математической речи;
- работы самостоятельно и в паре;
- осуществления взаимоконтроля и самоконтроля.

Тип урока: Урок изучения нового материала.

Оборудование: дидактический материал (карточки с определенным цветовым сигналом).

План урока.

1.Организационный этап. (8мин.)

2. Основной этап. (30мин.)

3. Подведение итогов. (2мин.)

I. Организационный этап

Цель: Создать благоприятную обстановку для работы в классе, подготовить учащихся к предстоящей работе, сообщить тему, цель и план работы.

Метод: словесный.

Деятельность учителя	Деятельность ученика
– Здравствуйте, ребята. Кто отсутствует? – Вам знакомо понятие «степени числа с целым показателем»?	Выражение a^n, где n – целое число.
– Для каких a и n оно определено?	– Выражение a^n определено для всех a и n, кроме случая a=0 при $n \le 0$.
– Перечислите свойства степени с целым показателем (учащиеся называют свойства, учитель записывает на доске, если не называют, то можно записать левую часть на доске, а ученики пусть называют правую, записанные свойства остаются на доске).	$a > 0, b > 0$ n, m – *натуральные числа.* $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $a^m : a^n = a^{m-n}$, *где* $a \ne 0$; $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$; $(ab)^n = a^n \cdot b^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, *где* $b \ne 0$; $a^1 = a$; $a^0 = 1$, *где* $a \ne 0$; *если* $m > n$, *то при* $a > 1$ $a^m > a^n$; *при* $0 < a < 1$ $a^m < a^n$;
– Выполним устно. Упростить выражения: $x^8 \cdot x^{-6}; x^3 : x^{-4}; (x^{-3})^{-4}; (a^{-1}в^{-4})^{-2}; 8^{\frac{1}{2}} : 8^{\frac{1}{6}}$	Ответы: x^2; x^7; x^{12}; $a^2в^8$ (возникает вопрос при упрощении последнего выражения)
– В чем трудность упрощения последнего выражения?	– Показатель степени – дробное число. Нам знакомо только понятие «степень с целым показателем»
–Так вот. Сегодня у нас несколько необычный урок, сегодня каждый из вас побывает в роли учителя. Попробуйте сами сформулировать тему урока.	– Степень с рациональным показателем и ее свойства. – изучение понятия степени

– В чем заключается цель урока? – Приступим к изучению!	с рациональным показателем ее свойств. – Научиться их применять при решении задач

II. Основной этап

Цель: объяснение алгоритма работы по карточкам, введение понятия степень с рациональным показателем; первичное закрепление полученных знаний на простейших заданиях.

Метод: словесный.

Деятельность учителя	Деятельность ученика
Работать будем следующим образом. Сейчас каждый из вас получит карточку с определенным цветовым сигналом. В каждой карточке содержится теория, это определение и свойства степени с рациональным показателем. Также, кроме теоретической части, есть практическая – задания для самостоятельного выполнения, и обязательная часть, которую вы должны выполнить. За выполнение дополнительных заданий вы можете получить дополнительную оценку. После того как вы ознакомились с содержанием своей карточки, а также выполнили задание, вам необходимо, следуя по маршруту указанному на доске, отыскать партнёра по цветовому сигналу. Найдя его, вы объясняете друг другу по очереди теоретический материал своей карточки, отвечаете на вопросы, если такие возникают, затем обмениваетесь карточками и выполняете практическую часть полученной карточки. Затем, человек, от которого вы получили карточку, проверяет правильность выполнения задания, если есть ошибки, исправляет. Если трудностей не	Учащиеся знакомятся с правилом работы в группах.

возникает, продолжаете двигаться по маршруту. Если возникает такая ситуация, что вы уже выполнили задание своей карточки, а ваш партнер ещё нет, то вы приступаете к выполнению дополнительного задания. Если вам не досталось партнера, то работать можно в тройках. За урок вам необходимо пройти весь маршрут. – В течение 8 минут вы знакомитесь с материалом полученной карточки, выполняете задание, затем следуете по маршруту. В тетради записываете число и тему сегодняшнего урока «Степень с рациональным показателем», записываете теоретический материал полученной карточки, и решение практической части. Чтобы не запутаться записываете на полях цветовой сигнал. Оценка будет выставляться за правильность выполнения работы по всем карточкам. –У кого возникли вопросы по работе с карточками? – Если в ходе работы будут возникать вопросы, можно обращаться ко мне. *красная* ↔ *синяя* маршрут записан на доске ↕ ↕) *зелёная* ↔ *оранжевая*	Учащиеся получают набор карточек

III. Этап самостоятельной работы по карточкам (см. приложение)

IV. Этап подведения итогов

Цель: подвести итоги урока.

Метод: словесный.

Деятельность учителя	Деятельность ученика
–Заканчиваем работу. Насколько хорошо вы усвоили данный материал, проверим на следующем уроке. Сейчас сдайте тетради на проверку.	Степень с рациональным показателем.

– С каким новым понятием познакомились сегодня на уроке? –Выпишите на доске рядом со свойствами степени числа с целым показателем свойства степени с рациональным показателем. – Можно ли представить отрицательное число в виде степени с рациональным показателем? После того как свойства выписаны: – Что можно сказать об этих свойствах? (учитель показывает на доску) **<u>Рефлексия:</u>** **–**Понравилось ли Вам быть учителем? – С какими трудностями Вы столкнулись? – Какие приятные ощущения Вы испытали? – Закончите фразу: «Я бы хотел похвалить себя за то, что…» <u>Домашняя работа:</u> –Дома вам нужно выучить теоретический материал пункта 34. №430, 431 (а,в), 437 (а,в), 444 – Спасибо всем за работу, урок окончен.	Один из учеников выписывает свойства на доске. Нет нельзя. Они аналогичны, добавилось лишь свойство, когда основания разные. Учащиеся активно принимают участие в беседе

Приложение 3

Цель используемых карточек:

– введение понятия и свойств степени с рациональным показателем;

– первичное закрепление полученных знаний.

Цели заданий.

Первого задания: формирование умения представлять выражение в виде степени с рациональным показателем, используя определение степени с рациональным показателем.

Второго задания: формирование умения представлять выражение в виде корня из числа, используя определение степени с рациональным показателем.

Третьего задания: формирование умения находить числовые значения, раскладывать на множители, а также сравнивать числа, используя определение и свойства степени с рациональным показателем.

Красная карточка

Определение. Степенью числа $a > 0$ с рациональным показателем $r = \frac{m}{n}$, где m–целое число, а n–натуральное ($n > 1$), называется число $\sqrt[n]{a^m}$. Итак, по определению $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$**.**

Пример 1. $7^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7}$; $2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$; $a^{-\frac{7}{15}} = \sqrt[15]{a^{-7}}$.

Свойства степени с рациональным показателем, где r,s–рациональные числа, $a > 0, b > 0$.

$1^0. a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

$2^0. a^r : a^s = a^{r-s}$

Пример 2. $\sqrt[4]{40} \cdot 2^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}} = \sqrt{2^3 \cdot 5} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 2^1 \cdot 5^1 = 10.$

Задание 1. Представьте $\sqrt[13]{b^{-7}}$ в виде степени с рациональным показателем.

Задание 2. Представьте в виде корня из числа $3^{1,2}$.

Задание 3. Найдите значение числового выражения $8^{\frac{1}{2}} : (8^{\frac{1}{6}} \cdot 9^{\frac{3}{2}})$.

Дополнительные задания. Найдите значение выражения

$8^{2\frac{1}{3}} : 81^{0,75}$; $\sqrt[3]{100} \cdot (\sqrt{2})^{\frac{8}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{3}}$.

Синяя карточка

Определение. Степенью числа $a>0$ с рациональным показателем $r=\frac{m}{n}$, где m–целое число, а n–натуральное ($n>1$), называется число $\sqrt[n]{a^m}$. Итак, по определению $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ **.**

Пример 1. $7^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{7};\quad 2^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{2^5}=\sqrt[6]{32};\quad a^{-\frac{7}{15}}=\sqrt[15]{a^{-7}}$.

Свойства степени с рациональным показателем, где r,s–рациональные числа, $a>0,b>0$.

$1^0.(a^r)^s=a^{r\cdot s}$

$2^0.(a\cdot b)^r=a^r\cdot b^r$

Пример 2. $(ax)^{\frac{1}{3}}+(ay)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})$.

Задание 1. Представьте $\sqrt[8]{4^5}$ в виде степени с рациональным показателем.

Задание 2. Представьте в виде корня из числа $5^{1,2}$.

Задание 3. Разложите на множители $(3x)^{\frac{1}{2}}-(5x)^{\frac{1}{2}}$.

Дополнительные задания. Разложите на множители $c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{4}};4-4^{\frac{1}{3}}$.

Зелёная карточка

Определение. Степенью числа $a>0$ с рациональным показателем $r=\frac{m}{n}$, где m–целое число, а n–натуральное ($n>1$), называется число $\sqrt[n]{a^m}$. Итак, по определению $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ **.**

Пример 1. $7^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{7};\quad 2^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{2^5}=\sqrt[6]{32};\quad a^{-\frac{7}{15}}=\sqrt[15]{a^{-7}}$.

Свойства степени с рациональным показателем, где r,s–рациональные числа, $a>0,b>0$.

$\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$

$2^0.$*Пусть* r *– рациональное число и* $0<a<b$, *тогда* $a^r<b^r$ *при* $r>0$ *и* $a^r>b^r$ *при* $r<0$.

Пример 2. $\left(1\frac{11}{25}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(4\frac{17}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{36}{25}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{36^{\frac{1}{2}}}{25^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{125^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}}=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}}\cdot\frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{3}=2$

Задание 1. Представьте $\sqrt[7]{3b}$ в виде степени с рациональным показателем.

Задание 2. Представьте в виде корня из числа $7^{1,2}$.

Задание 3. Найдите значение числового выражения $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-0,5}\cdot\left(4\frac{17}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

Дополнительные задания. Найдите значение выражения $\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}$.

Оранжевая карточка

Определение. Степенью числа $a>0$ с рациональным показателем $r=\frac{m}{n}$, где m–целое число, а n–натуральное ($n>1$), называется число $\sqrt[n]{a^m}$. Итак, по определению $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ **.**

Пример 1. $7^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{7};\quad 2^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{2^5}=\sqrt[6]{32};\quad a^{-\frac{7}{15}}=\sqrt[15]{a^{-7}}$.

Свойства степени с рациональным показателем, где r,s–рациональные числа, $a>0, b>0$

1^0.*Для любых рациональных чисел* r *и* s *из неравенства* $r>s$ *следует что,* $a^r>a^s$ *при* $a>1$ *и* $a^r<a^s$ *при* $0<a<1$.

Замечание. При $a<0$ рациональная степень числа а не определяется.

Пример 2. Сравните числа $\sqrt[5]{8}$ *и* $2^{\frac{2}{3}}$**.**

$\sqrt[5]{8}=\sqrt[5]{2^3}=2^{\frac{3}{5}}$ *и* $2^{\frac{2}{3}}$ *по* 1^0 *получаем* $2^{\frac{2}{3}}>2^{\frac{3}{5}}$, *так как* $\frac{2}{3}>\frac{3}{5}$**.**

Задание 1. Представьте $\sqrt[3]{a^{-2}}$ в виде степени с рациональным показателем.

Задание 2. Представьте в виде корня из числа $9^{1,2}$.

Задание 3. Сравните числа $\sqrt[7]{3^3}$ *и* $3^{\frac{19}{8}}$**.**

Дополнительные задания. Найдите значение выражения

$8^{2\frac{1}{3}}:81^{0,75};\quad \sqrt[3]{100}\cdot(\sqrt{2})^{\frac{8}{3}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{3}}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Степень с рациональным показателем. Подготовка к ЕГЭ

Тип урока: урок формирования первоначальных предметных навыков, овладения предметными умениями.

Цель:

Успешная сдача итоговой аттестации в форме ЕГЭ и последующий выбор дисциплины как специального предмета в будущей профессиональной деятельности.

Задачи:

Образовательные:

Организовать деятельность учащихся по изучению и осмыслению понятия степени с рациональным показателем ,при котором сохраняются основные свойства степеней.

Способствовать формированию у учащихся новых способов деятельности по одновременному применению свойств корня и степени в преобразованиях и вычислениях выражений.

Организовать работу учащихся с материалами ЕГЭ.

Воспитательные:

Способствовать привитию у учащихся организованности, внимательности, настойчивости.

Развивающие*:*

Создать условия для развития у учащихся умений формулировать проблемы, сравнивать познавательные объекты и выделять основную мысль.

Приучать учащихся контролировать свою деятельность с целью оправданного использования рабочего времени при сдаче ЕГЭ.

План урока.

1 **Организационный этап.**

Добрый день, дорогие друзья! Сегодня у нас необычный урок. К нам приехали в гости, уважаемые учителя математики. Но всё же я попрошу вас принять царственную осанку – спина прямая, мышцы головы без напряжения, выражение лица значительное, ведь вы сейчас знаете такое количество формул, которое не под силу даже царственным особам.

А пока вы входите в образ, послушайте притчу.

Притча:

«Однажды царь решил выбрать из своих придворных первого помощника. Он подвёл всех к огромному замку. «Кто первым откроет, тот и будет первым помощником». Никто даже не притронулся к замку. Лишь один визирь подошёл и толкнул замок, который открылся. Он не был закрыт на ключ.Тогда царь сказал: «Ты получишь эту должность, потому что полагаешься не только на то, что видишь и слышишь, а надеешься на собственные силы и не боишься сделать попытку».

И мы сегодня будем пытаться, пробовать, чтобы прийти к правильному решению.

Итак, вы успокоились. сосредоточились? Готовы работать?

Сегодня вы будете проводить исследования, направленные на укрепление не только знаний по алгебре, но и здоровья.

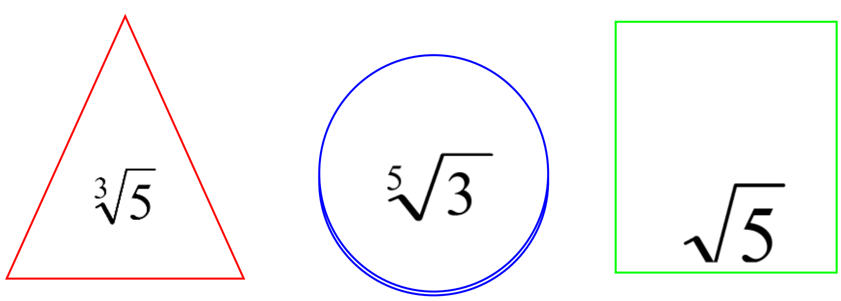
Для этого ответьте на вопрос: Как при таком объёме информации сохранить здоровье во время урока, накануне и во время экзамена?

Правильная осанка, хорошее освещение, сбалансированное питание с витаминами и минералами, не волноваться, избегать стрессов.

А чтобы на экзаменах у вас не было стресса, вы должны уже сейчас свободно выполнять задания из материалов ЕГЭ, уметь жёстко работать по времени, контролировать свою деятельность, уметь методом прикидки и минимальной подстановки выполнять проверку и тогда вы будете уверенными в себе.

2. Постановка цели и задач урока. Мотивация учебной деятельности учащихся.

Итак! Посмотрите внимательно несколько секунд на рисунок, запомните.



Ответьте на мои вопросы:

- ✓ Перечислите все корни, которые вы видели
- ✓ В какой геометрической фигуре расположен $\sqrt[5]{3}$? (в окружности)
- ✓ Какого цвета эта окружность? (синяя)
- ✓ Квадратный корень из какого числа находится в квадрате? (из 5)
- ✓ Какого цвета этот квадрат? (зелёного)
- ✓ В какой геометрической фигуре расположен корень кубический? (в треугольнике)
- ✓ Какого цвета этот треугольник? (красного)

Молодцы! Вы хорошо справились с первым испытанием! Внимательность очень нужна на экзаменах.

1. С каким математическим понятием связаны слова:

ОснованиеПоказатель *(Степень)*
Какими словами можно объединить слова:Целое числоНатуральное число*(Рациональное* число)
Сформулируйте тему урока. *(*Степень с р*ациональным* показателем)

2. Какая наша стратегическая цель? *(ЕГЭ)*Какова **цель нашего урока**?– Продолжить работу над степенями с рациональным показателем.

Задачи:

– повторить свойства степеней и корней– рассмотреть применение свойств степени при вычислениях и упрощениях выражений– отработка вычислительных навыков.

3. Воспроизведение и коррекция опорных знаний учащихся. Актуализация знаний.

1. Какие действия (математические операции) можно выполнять со степенями?

Установите соответствие:

При умножении степеней с одинаковыми основаниями…	А	1	…основание остается прежним, а показатели перемножаются.
При делении степеней с одинаковыми основаниями…	Б	2	…равно единице
При возведении степени в степень…	В	3	… основание остается прежним, а показатели складываются.

При возведении произведения в степень …	Г	4	…в эту степень возводят числитель и знаменатель и результаты делят.
При возведении дроби в степень	Д	5	…основание остается прежним, а показатели вычитаются.
Любое число в нулевой степени…	Е	6	… в эту степень возводят каждый множитель и результаты перемножают.

ОТВЕТ 3 5 1 6 4 2

Поменяться тетрадями и оценить работу соседа.(взаимопроверка)

Свойства	
Корни	**Степени**
$\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq+np}}$ $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b};$	$a^r\cdot a^s=a^{r+s}$ $a^r\cdot b^r=(a\cdot b)^r;$
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}};$ $\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}}=\sqrt[nq]{a^{mq-np}}$	$\frac{a^r}{b^r}=\left(\frac{a}{b}\right)^r;$ $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$ $(a^r)^s=a^{rs}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a};$ $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$	$a^0=1$ $a^1=a$ $a^{-p}=\frac{1}{a^p}.$

Пока все выполняют задание на соответсвие, двое учащихся у доски: пишут свойства степеней с рациональным показателем свойства корней с натуральным показателем.

Знание теории и формул не достаточно для успешной сдачи ЕГЭ. Но вы справились и со вторым испытанием: знание необходимого материала на ЕГЭ по теме.

Аристотель сказал: «Ум заключается не только в знании, но и в умении прилагать знание на деле.» Так вот и мы с вами перейдём от слов к делу.

4 Отработка знаний умений и навыков.

Сейчас, мы проведём эксперимент – сколько баллов можно набрать за 5 минут.

Цель: Организовать работу с материалами ЕГЭ по теме «Корни n–ой степени»Содействовать развитию умения жестко работать во времени и контролировать свою деятельность с целью подготовки к сдачи ЕГЭ.

A1 Упростить выражение $\sqrt[3]{\frac{m^{6}\cdot m^{-9}}{m^{12}}}$ (1 мин)– 1балл

а) m^5 б) m^{-5} в) m^{-15}

A2 Вычислить $\frac{\sqrt[3]{54}\cdot\sqrt{16}}{\sqrt[3]{250}}$ (2 мин)– 2балла

а) 5,2 б) 2,4 в) 2

A3 Вычислить $\left(\sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}-\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}}\right)^{-12}$ (4 мин)– 3балла

а) 2 б) 0,5 в) 1,2

B1 Вычислить $\sqrt[5]{2\sqrt{2}\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)}\cdot\sqrt[5]{2\sqrt{2}\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}$ (4

Внимание!

На работу отводится **только 5мин**. За это время вы можете выполнить 2–3 задания по выбору. Оценка соответствует количеству набранных баллов.

Сосредоточься!

1. Начинай с просмотра всего теста, оцени объективные и субъективные трудности заданий, сделай разумный выбор.

2. При выполнении заданий разделов А и В

	мин)– 4балла	расписывать решения нет необходимости.
B2 Вычислить $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{14+6\sqrt{5}}$	(4 мин)– 4балла	3. Методом прикидки и минимальной подстановки выполни проверку задания сразу после решения.**Помни о жестком регламенте времени**.
C1Найдите значение выражения $\sqrt{b-6\sqrt{b}+9}+\sqrt{b},$ $\text{если}\quad b^3=8$	(4мин)– 5баллов	**Торопись не спеша!**

Самопроверка.А теперь проверим и проанализируем с чем вы справились, а над чем надо поработать?

A1	**A2**	**A3**	**B1**	**B2**	**C1**
Б) m^{-5}	**Б)2,4**	**Б)0,5**	**2**	**2**	**3**

Вот вы справились и с третьим испытанием– работа по времени и контроль своей деятельности.

<u>Динамическая пауза</u>

1. <u>Упражнение на релаксацию</u>

Принять удобное положение. Расслабиться. Закрыть глаза и представить большой белый экран. Мысленно раскрасить этот экран любимым цветом. Получается ровно, красиво, радует глаз, залюбуешься.

Раз, два, три – открыли глаза. Каким цветом был ваш экран?

2. <u>Упражнение на сосредоточение внимания – «пальчики</u>»

Одновременно под счёт пальчиками левой и правой руки касаться большого пальца.

.

Работа в парах.

Цель: научиться применять умения преобразовывать выражения, содержащие степени с рациональным показателем.

Сократите дробь

$$\frac{a+6a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+6}$$

$$\frac{a-b}{ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b}.$$

$$\frac{x-y}{x^{0,5}+y^{0,5}}$$

Используйте свои навыки тождественных преобразований выражений, свойства степеней с рациональным показателем, формулы сокращенного умножения. Старайтесь лаконично и обоснованно рассказать решение примера своему партнеру. Ваша цель – добиться, чтобы партнер знал ход Ваших преобразований при решении задачи. Выслушайте решение задачи своего партнера.

Поблагодарите друг друга.

Резерв:

$$\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}-b}{a^{0,5}+2a^{0,25}\cdot b^{0,25}+b^{0,5}}$$

Заполните пропуски. Знание формул сокращённого умножения.а) $x - 2x^{\frac{1}{2}} = \ldots * (x^{\frac{1}{2}} - \ldots)$

б) $6^{\frac{1}{2}} - 2^{\dots} = 2^{\frac{1}{2}} * (\dots - 2^{\frac{1}{2}})$

в) $a - b = (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) * (\dots - \dots)$

г) $a + b = (\dots + \dots) * (a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$

<u>Ответы</u>

а) $x - 2x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} * (x^{\frac{1}{2}} - 2)$

б) $6^{\frac{1}{2}} - 2^{\dots} = 2^{\frac{1}{2}} * (3^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}})$

в) $a - b = (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) * (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})$

г) $a + b = (a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}) * (a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$

2 задания– «3»

3задания– «4»

4задания– «5»

Взаимопроверка.

<u>**Какие витамины и минералы необходимы человеку, чтобы быть здоровым?**</u>

Давайте вычислим суточную потребность организма в витаминах B_1, B_2, Fe, в миллиграммах.

Выполнение заданий по рядам.

1 ряд 2 ряд 3 ряд

$27^{\frac{1}{3}}$ $\quad * \left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$ $\quad \div 32^{\frac{1}{5}}$ $\quad$ **$0{,}09*(9)^2$**

ОТВЕТЫ на слайде, самопроверка

1 рядB_1 = 1,8 мг $\quad$ 2 ряд B_2 =1,5 мг $\quad$ 3 ряд Fe=0,81 мг

Дефицит витамина B_1 может привести к нарушению обмена углеводов. Витамин B_2 отвечает за состояние зрения, он необходим для построения защитного слоя сетчатки.
Дефицит железа сказывается на росте и устойчивости к инфекциям. От железа зависит построение гемоглобина – переносчика кислорода ко всем органам.

5. Этап закрепления и осмысления изученного материала.

Дифференцированная работа с модульными карточками 5 минДанная тема также используется на ЕГЭ, я подобрала вам задания из материалов ЕГЭ.Каждый учащийся работают самостоятельно с модульной карточкой 1,2,3 уровня, выбрав по силам задания. Выполненные задания проверяет и оценивает учитель.

МК **Цель:** Закрепить ваши знания по данной теме с помощью выполнения упражнений на упрощение выражений, содержащих степени с рациональным показателем.

1 уровень

Упростите и выберите вариант правильного ответа

:1. $\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{y^2}}$ а) $y^{2,5}$; б) $y^{\frac{1}{3}}$; в) y.

2. $\frac{\sqrt[5]{x^2\sqrt{x}}}{x^{-1,5}}$

а) $x^{2,5}$; б) $x^{\frac{1}{3}}$; в) x^2.

Рекомендации

1. Решайте самостоятельно варианты упражнений из ЕГЭ, выберите вариант правильного ответа и отметьте в карточке.
2. Если в записи примера есть как степени с рациональным показателем, так и корни n–й степени, то запишите корни n–й степени в виде степеней с рациональным показателем.
3. Постарайтесь упростить выражение, над которым выполняются действия: раскрытие скобок, переход от степени с отрицательным показателем к выражению, содержащему степени с положительным показателем.
4. При затруднении Вы можете обратиться к учителю.
5. Выполненные задания проверяет и оценивает учитель

МК **Цель:** Закрепить ваши знания по данной теме с помощью выполнения упражнений на вычисление, упрощение выражений, содержащих степени с рациональным показателем используя определение и свойства степени.

2 уровень

Упростите и выберите вариант правильного ответа :

1. ($a^{0,4})^{\frac{1}{2}}$ *$a^{0,8}$;

а) $a^{1,6}$; б) a; в) $a^{\frac{4}{5}}$

Рекомендации

1. Решайте самостоятельно варианты упражнений из ЕГЭ, выберите вариант правильного ответа и отметьте в карточке.
2. Если в записи примера есть как степени

2. $\dfrac{a^{2,5}\cdot a^{-0,5}}{(a:a^{-2})^{\frac{1}{2}}}$

а) a^{-1} б) a^{1} в) $a^{0,5}$ г) $a^{-1,5}$

с рациональным показателем, так и корни n–й степени, то запишите корни n–й степени в виде степеней с рациональным показателем.

3. Постарайтесь упростить выражение, над которым выполняются действия: раскрытие скобок, переход от степени с отрицательным показателем к выражению, содержащему степени с положительным показателем.
4. При затруднении Вы можете обратиться к учителю.
5. Выполненные задания проверяет и оценивает учитель.

МК

Цель: Закрепить ваши знания по данной теме с помощью выполнения упражнений на вычисление, упрощение выражений, содержащих степени с рациональным показателем используя определение и свойства степени.

3 уровень

Разложите на множители

1. $x^{\frac{3}{4}} \div \sqrt[4]{x}$

Упростите

2. $\left(p^{-1}\cdot q^{\frac{5}{4}}\cdot\left(p^{3,5}\cdot q^{-\frac{1}{8}}\right)^{2}\right)^{-1}$

Рекомендации

1. Решайте самостоятельно варианты упражнений из ЕГЭ
2. Если в записи примера есть как степени с рациональным показателем, так и корни n–й степени, то запишите корни n–й степени в виде степеней с рациональным показателем.
3. Постарайтесь упростить выражение, над которым выполняются действия: раскрытие скобок, переход от

степени с отрицательным показателем к выражению, содержащему степени с положительным показателем.

4.

При затруднении Вы можете обратиться к учителю.

5. Выполненные задания проверяет и оценивает учитель.

1 уровень *2 уровень*

1b *1б*

2b *2 b*

Резерв: $\frac{(x^{\frac{1}{4}}-4)^2}{x^{\frac{1}{2}}-16}$

6.Этап информирования и инструктажа домашнего задания

1.В учебнике на стр.219 повторить свойства степеней с рациональным показателем и на стр. 220 самостоятельно разобрать свойства 6,7.

2. Работать по карточкам (внимательно читать рекомендации).

Карточка № 1

Цель: закрепить навык преобразования выражений, содержащих рациональные степени, пользуясь формулами сокращенного умножения.

Вспомните определение степени с рациональным показателем и формулы сокращенного умножения. Рассмотрите пример 4 на стр.220 учебника под ред. А.Н.Колмогорова.

Выполните письменную работу.

Упростить выражение:

Корректирующий вариант

а) $\frac{5-x^{\frac{1}{2}}}{25-x}$ $\frac{6+x^{\frac{1}{2}}}{36-x}$

б) $\frac{a+в-2\sqrt{aв}}{a-в}$ $\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$

в) $\frac{1-x^{\frac{1}{5}}}{1+x^{\frac{1}{10}}}+(1+x^{\frac{1}{30}})(1-x^{\frac{1}{30}}+x^{\frac{1}{15}})$ $\frac{1-x^{\frac{1}{6}}}{1-x^{\frac{1}{12}}}+(1-x^{\frac{1}{36}})(1+x^{\frac{1}{36}}+x^{\frac{1}{18}})$

Желаю успеха!

Карточка № 2

Цель: закрепить навык сравнения чисел, представленных в виде степени с рациональным показателем.

Вспомните свойства степени с рациональным показателем.

Рассмотрите примеры 5, 6 на стр. 221 учебника под ред. А.Н. Колмогорова.

Выполните письменную работу.

Сравните числа:

Корректирующий вариант

а) $\sqrt[7]{2^4}$ и $2^{\frac{2}{3}}$ $\sqrt[8]{5^7}$ и $5^{\frac{3}{4}}$

б) $(\sqrt{3})^{-\frac{5}{6}}$ и $\sqrt[3]{3^{-1}\sqrt{\frac{1}{3}}}$ $\qquad$ $(\frac{1}{2})^{-\frac{5}{7}}$ и $\sqrt{2} \times 2^{\frac{3}{14}}$

в) 3^{600} и 5^{400} $\qquad$ 7^{30} и 4^{40}

Желаю успеха!

<u>7. Этап подведение итогов занятия</u>Вернемся к целям урока, которые себе поставили. Давайте отметим то, что у нас получилось из намеченного. Что нового сегодня вы узнали?

Молодцы, вы активно работали на разных этапах занятия.Ответы достаточно аргументированы, оперировали понятиями, сочетая теоретические знания с практическими, активно вносили поправки.

_____________работали особенно старательно.

8 <u>Этап рефлексии</u>*:*

Что я усвоил для себя:

<u>Зелёный цвет–</u> всё получилось, я спокоен за себя при сдаче ЕГЭ;

<u>Жёлтый цвет–</u> есть небольшие пробелы, но я с ними справлюсь;

<u>Красный цвет–</u> я ничего не понимаю и очень боюсь сдавать ЕГЭ.

Из ТРЁХ ЦВЕТОВ БУМАГИ выберите, пожалуйста, тот, который лучше всего отражает ваше внутреннее состояние и с помощью которой вы могли бы рассказать нам о своем настроении, о своем самочувствии и о степени своей удовлетворенности, готовности по данной теме к ЕГЭ. Наклейте, пожалуйста, выбранные вами листочки с соответствующим цветом на куб. Итак, что у нас с вами получилось? Куб должен быть одного цвета в том случае. если всё у вас уже получается, но он разных цветов – есть ещё над чем работать.

Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их

(Д. Пойа)

Урок закончен. Спасибо за урок!

Оценочный лист (Ф.И.)

№	Задания	«2»	«3»	«4»	«5»
1	**Установите соответствие** **«5»– 6 заданий** **«4»– 5 заданий** **«3»– 3–4 задания** **Или Работа у доски на знание теории**				
2	**Эксперимент – сколько баллов можно набрать за 5 минут.** **Кол–во баллов соответствуют оценке**				
3	**Заполните пропуски.** **(Знание формул сокращённого умножения.)** **«5»– 4 задания** **«4»– 3 задания** **«3»– 2 задания**				
4	**Вычисление суточной потребности организма в витаминах B_1, B_2, Fe, в миллиграммах.** **«5»–выполнил задание**				
5	**Дифференцированная работа с**				

	<u>модульными карточками 5 мин</u> **(оценивает учитель)**				
Оценка за урок					